

ПРОЧИЕ ВОПРОСЫ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ / OTHER QUESTIONS RELATED TO CONSTRUCTION AND ARCHITECTURE

DOI: <https://doi.org/10.18454/mca.2022.28.1>

ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ

Научная статья

Земцова О.Г. *

ORCID: 0000-0001-6731-829X,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, Пенза, Россия

* Корреспондирующий автор (zemtsova-og[at]yandex.ru)

Аннотация

В статье приводится обзор математических моделей грунтового основания, наиболее широко используемых в настоящее время при моделировании систем «грунтовое основание – здание», в том числе с применением программно-вычислительных комплексов (таких как SCAD Office, Лира, Robot Structural Analysis, Plaxis, Ansys, Abaqus и других). Для каждой из рассматриваемых моделей (модель Винклера, модель Пастернака, модель линейно деформируемого полупространства, модель упругопластической среды или модель Кулона-Мора) представлены теоретические основы, математические зависимости, схематичное представление. Выполнен анализ данных математических моделей грунтового основания, описаны основные преимущества и недостатки.

Ключевые слова: грунт, грунтовое основание, математическая модель, модель Винклера, модель Пастернака, модель линейно деформируемого полупространства.

OVERVIEW OF MATHEMATICAL MODELS OF THE EARTH FOUNDATION

Research article

Zemtsova O.G. *

ORCID: 0000-0001-6731-829X,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russia

* Corresponding author (zemtsova-og[at]yandex.ru)

Abstract

The article provides an overview of mathematical models of the earth foundation, most widely used at present in the modeling of "earth foundation – building" systems, including the use of software and computing systems (such as SCAD Office, Lira, Robot Structural Analysis, Plaxis, Ansys, Abaqus and others). For each of the studied models (Winkler model, Pasternak model, linearly deformable halfspace model, elastic-plastic environment model or Mohr–Coulomb model), theoretical foundations, mathematical dependencies, schematic presentation are given. The analysis of the data of mathematical models of the earth foundation is carried out, the main advantages and disadvantages are described.

Keywords: earth, earth foundation, mathematical model, Winkler model, Pasternak model, model of a linearly deformable halfspace.

Введение

В настоящее время для выполнения расчетов, учитывающих совместную работу здания с основанием, отсутствует общепризнанная единая методика математического моделирования свойств грунтового основания. Поэтому применяется несколько основных математических моделей, каждая из которых имеет свои преимущества и недостатки. Выбор конкретной методики моделирования представляет собой сложную многофакторную задачу. Целью данной статьи является обобщение наиболее распространенных для практических расчетов моделей грунтов. Для каждой из рассматриваемых математических моделей приведены теоретические предпосылки, обосновывающие состав разрешающих уравнений. Таким образом, данная статья даёт краткий и структурированный перечень математических моделей грунтов, который может быть применен при решении ряда актуальных научно-практических задач.

Модель Винклера

Гипотеза Винклера базируется на основе предположения о прямой пропорциональной зависимости между осадкой и реактивным давлением грунта

$$P = K \cdot S \quad (1)$$

где P – реактивное давление грунта;

K – коэффициент, который зависит от физических свойств грунтового основания;

S – величина осадки.

Коэффициент постели определяется экспериментально для конкретных геологических условий.

Поэтому для реальных грунтов в справочных таблицах приводится некоторый диапазон значений, в которых может находиться величина коэффициента K . Физически модель Винклера можно представить в виде множества независимых одинаковых упругих пружин, которые опираются на абсолютно жесткое основание (см. рисунок 1).

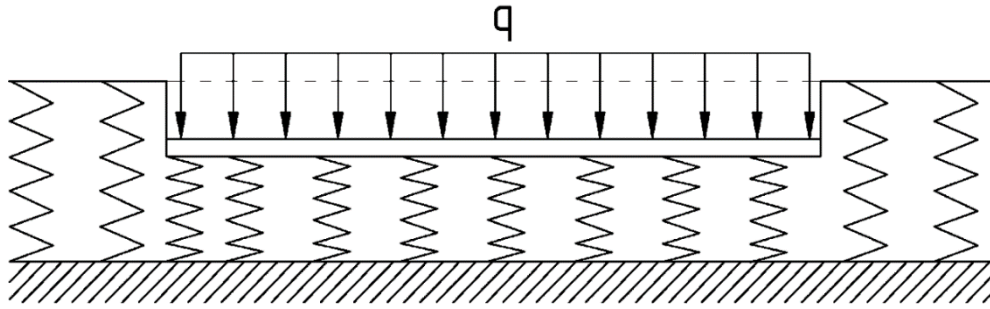


Рис. 1 – Схематичное представление модели Винклера

К недостаткам модели Винклера можно отнести несколько существенных моментов. Во-первых, величина коэффициента постели при экспериментальном ее определении в значительной степени зависит от размеров штампа, который используется при проведении испытаний. Во-вторых, данная модель предполагает, что деформация основания происходит только в области приложения нагрузки. Однако, в реальных условиях осадка грунта происходит и за пределами фундамента здания. В-третьих, модель Винклера предполагает, что опорные конструкции проседают равномерно, без изгибных деформаций, что не в полной мере соответствует реальной работе системы «сооружение – основание». Основное преимущество данной математической модели – простота и малая трудоемкость, поэтому её часто применяют в расчетах (иногда с дополнениями и усовершенствованиями) [1], [2].

Модель Пастернака

Данная математическая модель является усовершенствованием модели Винклера путем введения двух коэффициентов постели: C_1 – коэффициент сжатия, C_2 – коэффициент сдвига [5].

$$\sigma = C_1 \cdot S \quad (2)$$

где σ – вертикальный отпор грунта.

$$\tau = C_2 \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \quad (3)$$

где τ – вертикальная сила сдвига.

Следует отметить, что коэффициенты модели Пастернака отличаются от коэффициента постели модели Винклера. Физический смысл коэффициентов: C_1 – это величина усилия, которое необходимо приложить к 1 квадратному метру поверхности основания, чтобы оно осело на 1 м; C_2 – коэффициент сдвига, который характеризует жесткость основания на сдвиг и дает возможность выразить интенсивность вертикальной силы сдвига (или изгибающего момента) в виде произведения C_2 на производную осадки в соответствующем направлении. Вычисление коэффициентов C_1 и C_2 может быть выполнено с помощью программы КРОСС, входящей в программный комплекс SCAD Office [3], [4].

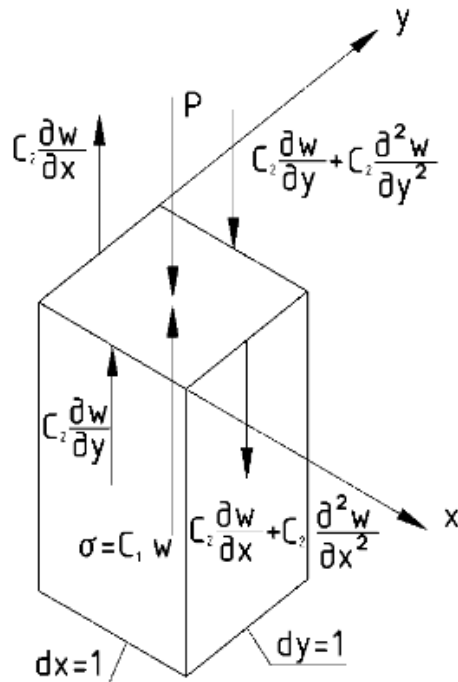


Рис. 2 – Схематичное представление модели Пастернака

В модели Пастернака дифференциальное уравнение поверхности осадки имеет вид:

$$C_1 \cdot S - C_2 \cdot \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) - P = 0 \quad (4)$$

Модель линейно деформируемого полупространства

В нормативно-технической документации [6] используется модель линейно деформируемого полупространства, в основе которой лежит закон Гука. То есть данная модель предполагает линейную зависимость между деформациями и напряжениями (см. рисунок 3), а также допущение о том, что материал (грунт) является идеально упругим (т.е. остаточные деформации после разгрузки отсутствуют).

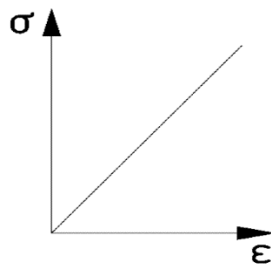


Рис. 3 – Диаграмма «деформации – напряжения», используемая в модели линейно деформируемого полупространства

Закон Гука имеет вид:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (5)$$

где σ – напряжение;

E – механическая характеристика материала: модуль упругости материала (в данном случае – грунта);

ε – относительная деформация.

Недостатком метода можно считать то, что применение допущения об идеально упругом материале противоречит физическим свойствам грунта. Однако, при отсутствии разгрузки, то есть при однократном нагружении основания, данная математическая модель может быть применена в расчетах (см. рисунок 4).

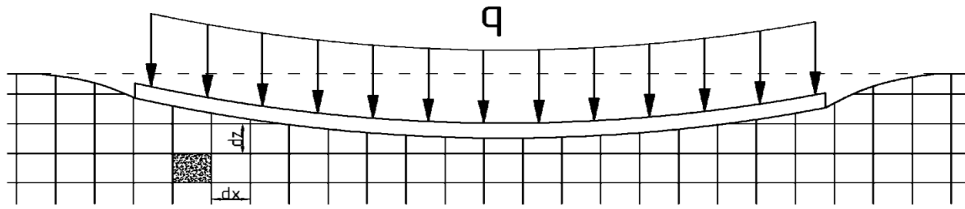


Рис. 4 – Схематическое представление модели линейно деформируемого полупространства

При использовании модели линейно деформируемого полупространства расчет сводится к решению системы уравнений, отражающих три стороны задачи: статическую, геометрическую и физическую.

Для плоского бесконечно малого элемента грунтового основания (см. рисунок 5) система разрешающих уравнений для определения нормальных и касательных напряжений $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$, деформаций $\epsilon_x, \epsilon_z, \gamma_{xz}$ и перемещений U, W имеет вид:

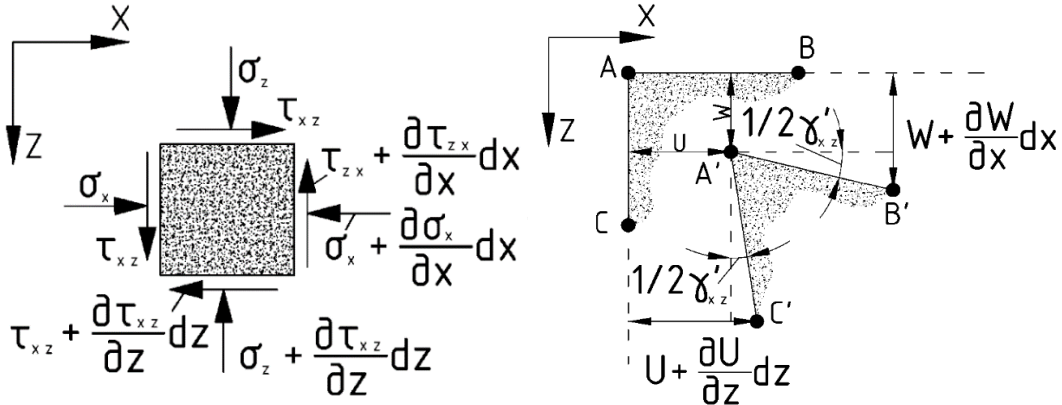


Рис. 5 – Напряжения и деформации бесконечно малого элемента грунтового основания

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \\ \epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \\ \epsilon_x = \frac{1}{E} \cdot [(1 - \nu^2) \cdot \sigma_x - \nu \cdot (1 + \nu) \cdot \sigma_z] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [(1 - \nu^2) \cdot \sigma_z - \nu \cdot (1 + \nu) \cdot \sigma_x] \\ \gamma_{xz} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{xz} \end{array} \right. \quad (6)$$

где X и Z – проекции объемных сил на оси x и z , соответственно;

ν – коэффициент Пуассона (величина отношения относительного поперечного сжатия к относительному продольному растяжению), зависящий от материала.

Модель упругопластической среды (модель Кулона-Мора)

Эта математическая модель основана на сочетании модели линейно деформируемого полупространства и модели среды теории предельного равновесия. То есть в грунтовом основании предполагается область среды линейно деформируемого полупространства и область среды теории предельного равновесия (см. рисунок 6). В этом случае после этапа линейных деформаций грунт переходит в предельное состояние (см. рисунок 7).

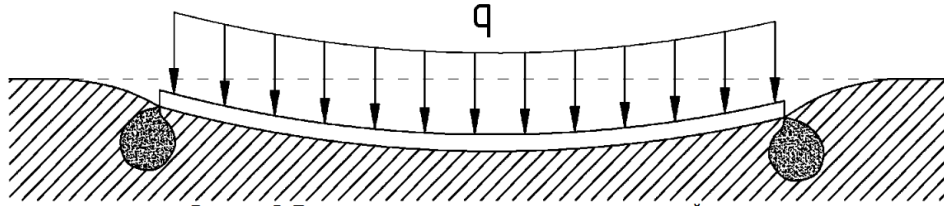


Рис. 6 – Схематичное представление модели упругопластической среды

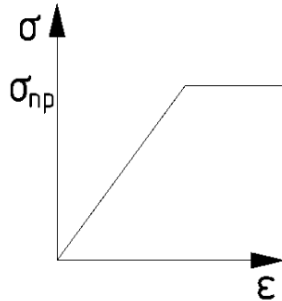


Рис. 7 – Диаграмма «деформации – напряжения», используемая в модели упругопластической среды

Система разрешающих уравнений для данной модели состоит из совокупности следующих условий:

– уравнений равновесия для всего грунтового основания

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (7)$$

– уравнений совместности для упругой области грунтового основания

$$\nabla^2 \cdot (\sigma_x + \sigma_z) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \quad (8)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

– уравнений для области предельного равновесия

$$\sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_c) \cdot \sin \varphi \quad (9)$$

В качестве основного условия предельного равновесия применяется условие Ш. Кулона, по которому на площадках возможного начала скольжения касательные напряжения связаны с нормальными напряжениями зависимостью:

$$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi + c \quad (10)$$

где φ – угол внутреннего трения грунта;

c – сцепление грунта.

Уравнение Кулона представляет собой частный случай теории прочности Мора [7], по которой сопротивление сдвигу по какой-либо площадке является функцией от нормального напряжения. Поэтому данную математическую модель часто называют моделью Кулона-Мора.

Математическая модель упругопластической среды применяется для приближенной оценки напряженно-деформированного состояния грунта.

Заключение

Таким образом, при математическом моделировании систем «грунтовое основание – здание» в настоящее время наиболее широко используются следующие модели грунтов: модель Винклера, модель Пастернака, модель линейной деформируемого полупространства, модель упругопластической среды или модель Кулона-Мора. В статье приведены теоретические основы, математические зависимости и схематичное представление этих моделей. А также проанализированы и описаны основные преимущества и недостатки, что позволяет обосновывать применение конкретной математической модели при проведении расчетов.

Следует отметить, что в настоящее время расчет совместной работы системы «сооружение – грунтовое основание» выполняется, как правило, с применением программно-вычислительных комплексов, таких как SCAD Office, Лира,

Robot Structural Analysis, Plaxis, Ansys, Abaqus и других [3], [8], [9], [10]. В них представлены различные методики моделирования грунтового основания, в том числе и усовершенствованные модели, обеспечивающие наиболее точное отражение реальных свойств грунтового основания сооружения.

Conflict of Interest

None declared.

Конфликт интересов

Не указан.

Список литературы / References

1. Шеин А.И. Снижение уровня колебаний системы «упругое основание – высотное сооружение» с помощью нелинейного динамического гасителя / А.И. Шеин, О.Г. Земцова // Региональная архитектура и строительство. 2011. – № 2. – С. 83–90.
2. Земцова О.Г. Моделирование и исследование динамики высотных сооружений с гасителями колебаний : дис. ... канд. техн. наук : 05.13.18 : защищена 28.06.2013 : утв. 30.09.2013 / Земцова Ольга Григорьевна. – Пенза: ПензГТА, 2013. – 167 с.
3. Земцова О.Г. Комплексы программ, применяемые для моделирования и расчета конструкций зданий и сооружений / О.Г. Земцова, В.А. Володин // Моделирование и механика конструкций. – 2015. – № 1. – С. 5.
4. Белокопытова И.А. SCAD для чайников / И.А. Белокопытова, С.Г. Бурьгин и др. – URL: <https://clck.ru/325SEg> (дата обращения: 17.06.2022).
5. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели / П.Л. Пастернак. – М.: Стройиздат, 1954. – 55 с.
6. СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83. – Введ. 2011-05-20. – М.: Центр проектной продукции в строительстве, 2010. – 162 с.
7. Соппротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Под ред. Г.С. Варданяна. – М.: АСВ, 1995. – 568 с.
8. Абдурахманов А.З. К вопросу о работе стальных каркасов многоэтажных зданий в сейсмоопасных условиях / А.З. Абдурахманов // Современное строительство и архитектура. – 2022. – №1(25). – С. 4–13.
9. Земцова О.Г. Определение периода и формы собственных колебаний зданий и сооружений при сейсмическом воздействии с учетом податливости основания / О.Г. Земцова // Инженерный вестник Дона. – 2021. – № 5 (77). – С. 546–552.
10. Земцова О.Г. Особенности обследования конструкций металлических силосов / О.Г. Земцова, Е.Н. Гуреева, Д.П. Береговой // Моделирование и механика конструкций. – 2020. – №12. – С. 157–166.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Shein A.I. Snizhenie urovnja kolebanij sistemy «uprugoe osnovanie – vysotnoe sooruzhenie» s pomoshh'ju nelinejnogo dinamicheskogo gasitelja [Reducing the level of oscillations of the "elastic foundation – high-rise structure" system using a nonlinear dynamic absorber] / A.I. Shein, O.G. Zemtsova // Regional'naja arhitektura i stroitel'stvo [Regional architecture and construction]. 2011. – № 2. – pp. 83–90. [in Russian]
2. Zemtsova O.G. Modelirovanie i issledovanie dinamiki vysotnyh sooruzhenij s gasiteljami kolebanij [Modeling and study of the dynamics of high-rise structures with vibration dampers] : dis. ... of PhD in Engineering: 05.13.18 : defense of the thesis 28.06.2013 : approved. 30.09.2013 / Zemtsova Olga Grigorevna. – Penza: PenzGTA, 2013. – 167 p. [in Russian]
3. Zemtsova O.G. Kompleksy programm, primenjaemye dlja modelirovanija i rascheta konstrukcij zdaniy i sooruzhenij [Software complexes used for modeling and calculation of structures of buildings and structures] / O.G. Zemtsova, V.A. Volodin // Modelirovanie i mehanika konstrukcij [Modeling and structural mechanics]. – 2015. – № 1. – P. 5. [in Russian]
4. Belokopytova I.A. SCAD dlja chajnikov [SCAD for dummies] / I.A. Belokopytova, S.G. Burygin et al. – URL: <https://clck.ru/325SEg> (accessed: 17.06.2022). [in Russian]
5. Pasternak P.L. Osnovy novogo metoda raschjota fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshhi dvuh koeficientov posteli [Fundamentals of a new method for calculating foundations on an elastic foundation using two bed coefficients] / P.L. Pasternak. – M.: Strojizdat, 1954. – 55 p. [in Russian]
6. SP 22.13330.2011. Osnovaniya zdaniy i sooruzhenij. Aktualizirovannaja redakcija SNiP 2.02.01-83 [Foundations of buildings and structures]. – Vved. 2011-05-20. – M.: Centr proektnoj produkcii v stroitel'stve, 2010. – 162 p. [in Russian]
7. Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti: uchebnik [Strength of materials with the basics of the theory of elasticity and plasticity: textbook] / edited by G.S. Vardanzan. – M.: ASV, 1995. – 568 p. [in Russian]
8. Abdurakhmanov A.Z. K voprosu o rabote stal'nyh karkasov mnogoetazhnyh zdaniy v sejsmoopasnyh uslovijah [On the issue of the operation of steel frames of multi-storey buildings in earthquake-prone conditions] / A.Z. Abdurakhmanov // Sovremennoe stroitel'stvo i arhitektura [Modern building and architecture]. – 2022. – №1(25). – pp. 4–13. [in Russian]
9. Zemtsova O.G. Opredelenie perioda i formy sobstvennyh kolebanij zdaniy i sooruzhenij pri sejsmicheskom vozdejstvii s uchetom podatlivosti osnovanija [Determination of the period and form of natural oscillations of buildings and structures under seismic action, taking into account the compliance of the base] / O. G. Zemtsova // Inzhenernyj vestnik Dona [Don Engineering Gazette]. – 2021. – № 5 (77). – pp. 546–552. [in Russian]
10. Zemtsova O.G. Osobennosti obsledovanija konstrukcij metallicheskih silosov [Features of inspection of structures of metal silos] / O.G. Zemtsova, E.N. Gureeva, D.P. Beregovoj // Modelirovanie i mehanika konstrukcij [Modeling and structural mechanics]. – 2020. – №12. – pp. 157–166. [in Russian]