**DOI: https://doi.org/10.18454/mca.2022.27.5**

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛОК С ПЕРЕМЕННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Научная статья

**Рзаев Н.С.[1] *, Аббасова Г.Н.[2]**
[1] Бакинский инженерный университет, Баку, Азербайджан
[2] Азербайджанский технический университет, Баку, Азербайджан

* Корреспондирующий автор (natiq.rzayev.1984[at]list.ru)

**Аннотация**

В данной работе исследуются свободные колебания разномодульной, неоднородной по толщине и длине балки, находящейся на основании, характеризуемые двумя константами. Поскольку уравнение движения является сложным дифференциальным уравнением четвертого порядка с частными производными относительно изгиба, то оно решается приближенным аналитическим методом. На первом этапе используется метод разложения на переменные, а на втором – ортогонализации Бубнова-Галеркина. Вычисления проводятся в первом приближении. Строится кривая зависимости частоты от неоднородности. Здесь, также, учитывается вариабельность плотности. Вычисления проводятся в основном при линейном изменении характеристических функций по толщине и длине балки.

**Ключевые слова:** растяжение, сжатие, изгиб, кручение, эластичность, круговая частота, колебание.

# FREE OSCILLATIONS OF BEAMS WITH VARIABLE CROSS-SECTION

Research article

**Rzaev N.S.[1] *, Abbasova G.N.[2]**
[1] Baku Engineering University, Baku, Azerbaijan
[2] Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

* Corresponding author (natiq.rzayev.1984[at]list.ru)

**Abstract**

In this paper, free oscillations of a beam of different modules, heterogeneous in thickness and length, located on the base, characterized by two constants, are examined. Since the equation of motion is a complex fourth-order differential equation with respect to bending, it is solved with an approximate analytical method. At the first stage, the variable decomposition method is used, and at the second – the Bubnov-Galerkin orthogonalization. Calculations are carried out in the initial approximation. A curve of frequency dependence on inhomogenuity is constructed. Here the variability of density is taken into account as well. Calculations are carried out mainly with a linear change in the characteristic functions of the thickness and length of the beam.

**Keywords:** stretching, compression, bending, rotation, elasticity, rotational frequency, oscillation.

## Введение

В современное время, балки, доски и покрытия с переменным поперечным сечением из различных материалов находят широкое применение в строительстве различных комплексов, эстакад и мостов, машиностроении и многих других областях. При эксплуатации этих элементов конструкции возникает необходимость изучения вопросов колебательного движения.

## Результаты и обсуждение

Следует отметить, что в рамках классической теории упругости детально изучены вопросы устойчивости и колебательного движения балок с переменным поперечным сечением. Однако, при решении этих задач не учитывались разномодульность и сопротивление внешней среды. В настоящее время во многих областях строительства и машиностроении используют материалы, обладающие сложными свойствами, не подчиняющимися основным законам классической теории упругости и пластичности. Среди них широко используются материалы, оказывающие различное сопротивление растяжению-сжатию и скручиванию. Следует отметить, что учет разномодульности и сопротивления внешней среды создает определенные трудности при изучении колебательных движений. А если их не предусмотреть, то это приведет к многочисленным ошибкам.

В случае, когда материал балки является разномодульным, с переменным поперечным сечением, а также учитывается сопротивление внешней среды, решение задачи становится трудным и анализ полученных результатов усложняется.

В рассматриваемой задаче предполагается, что поперечное сечение балки переменное, имеет две оси симметрии и расположено на основании Пастернаковского типа [1].

Распределение напряжения по поперечному сечению записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma^{+} &= E^{+}(e - z\wp)\; z \in S_1 \\ \sigma^{-} &= E^{-}(e - z\wp)\; z \in S_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $E^{+}$, $E^{-}$ — модули упругости при растяжении и сжатии, $e$, $\wp$ — соответственно, деформация и кривизна центральной линии, $S_1$ — площадь растягиваемой области, $S_2$ — площадь сжимаемой области.

Граница нейтральной оси $z_0$ связана с деформацией $e$ и кривизной $\wp$ следующим образом:

$$e - z_0\wp = 0 \tag{2}$$

Условие равновесия:

Условия отсутствия осевой силы:

$$\int_{S_1} \sigma^{+} ds + \int_{S_2} \sigma^{-} ds = 0 \tag{3}$$

Уравнение изгибающего момента:

$$M = \int_{S_1} \sigma z ds + \int_{S_2} \sigma^{-} z ds \tag{4}$$

Упростим выражение (4):

$$E^{+} \int_{S_1} (e - z_0\wp) ds + E^{-} \int_{S_2} (e - z_0\wp) ds = 0 \tag{5}$$

Учитывая обозначение $\alpha = \frac{E^{-}}{E^{+}}$ и выражение (2), получим следующее выражение:

Если учитывать здесь (2), то

$$\int_{S_1} (z - z_0) ds + \alpha \int_{S_2} (z - z_0) ds = 0$$

или

$$z_0 = \frac{\int_{S_1} zds + \alpha \int_{S_2} zds}{\int_{S_1} ds + \alpha \int_{S_2} ds} \tag{6}$$

Произведем следующую замену:

$a_1 = \int_{S_1} ds$; $a_2 = \int_{S_2} ds$; $a_3 = \int_{S_1} zds$; $a_4 = \int_{S_2} zds$;

С учетом замен выражение (6) записывается следующим образом:

$$z_0 = \frac{a_3 + \alpha a_3}{a_3 + \alpha a_2} \tag{7}$$

Вычислим изгибающий момент:

$$M = E^{+} \int_{S_1} (e - z_0\wp) zds + E^{-} \int_{S_2} (e - z_0\wp) zds \tag{8}$$

или

$$M = E^{+} J_0 \left[ \frac{1}{J_0} \left( a_5 + \alpha a_6 - \frac{(a_3 + 2a_4)^2}{a_1 + \alpha a_2} \right) \right] \wp \tag{9}$$

В выражении (9) были произведены замены: $a_5 = \int_{S_1} z^2 dz$, $a_6 = \int_{S_1} z^2 dz$.

Примем следующее обозначение:

$$K = \frac{1}{J_0} \left[ a_5 + \alpha a_6 - \frac{(a_3 + \alpha a_4)^2}{a_1 + \alpha a_2} \right] \tag{10}$$

Если подставить выражение (10) в выражение (9), то получим:

$$M = E^{+} J_0 K \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{11}$$

здесь $E^{+}J_0$ — жесткость упругой балки при изгибе, $W$ — изгиб.

Если основание является Пастернаковского типа, то уравнение движения записывается следующим образом:

$$E^{+}J_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[K(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]+K_1W-K_2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\rho_0 h(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0 \tag{12}$$

Когда основание является типом Фусса-Винклера, то уравнение записывается следующим образом:

$$E^{+}J_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[K(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]+K_v\big(1+\varepsilon\phi(x)\big)W+\rho_0 h(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0 \tag{13}$$

А когда, основание является неоднородным вязкоупругим, то уравнение имеет следующий вид:

$$E^{+}J_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[K(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]+K_1(x)W-K_2(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\rho_0 h(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0 \tag{14}$$

Анализируем задачу, при которой поперечное сечение балки имеет переменный прямоугольный вид.

Для этого необходимо установить связь между границей нейтральной оси, деформацией, кривизной и изгибающим моментом.

Запишем уравнения равновесия и нейтральной оси.

Граница нейтральной оси $z_0$ определяется следующим уравнением:

$$e-z_0\wp=0 \tag{15}$$

Условия отсутствия осевой силы (для прямоугольной балки с поперечным сечением $b$):

$$\int_{-h(x)}^{z_0}\sigma^{+}dz+\int_{z_0}^{h(x)}\sigma^{-}dz=0 \tag{16}$$

Уравнение изгибающего момента:

$$M=b\left[\int_{-h(x)}^{z_0}\sigma^{+}zdz+\int_{z_0}^{h(x)}\sigma^{-}zdz\right] \tag{17}$$

Сначала исследуем уравнение (16). Учитывая (15), уравнения (16) и (17) можно записать следующим образом:

$$\int_{-h(x)}^{z_0}(e-\wp z)dz+\alpha\int_{z_0}^{h(x)}(e-z\wp)dz=0 \tag{18}$$

$$\left[\int_{-h(x)}^{z_0}(e-z\wp)zdz+E^{-}\int_{z_0}^{h(x)}(e-z\wp)zdz\right]=\frac{M}{E^{+}b} \tag{19}$$

Из уравнения (18) можно записать:

$$e\left(\int_{-h(x)}^{z_0}dz+z\int_{z_0}^{+h(x)}dz\right)-\wp\left(\int_{-h(x)}^{z_0}zdz+\alpha\int_{z_0}^{+h(x)}zdz\right)=0 \tag{20}$$

Отсюда получим:

$$e=\wp\frac{\int_{-h(x)}^{z_0}zdz+\alpha\int_{z_0}^{h(x)}zdz}{\int_{-h(x)}^{z_0}dz+\alpha\int_{z_0}^{+h(x)}dz} \tag{21}$$

Из уравнения (19) получим следующее выражение:

$$\frac{M}{E^{+}b}=e\left(\int_{-h(x)}^{z_0}zdz+\int_{z_0}^{+h(x)}zdz\right)-\wp\left(\int_{-h(x)}^{z_0}z^2dz+\alpha\int_{z_0}^{+h(x)}z^2dz\right) \tag{22}$$

Учитывая выражение (21) в (22), можно написать:

$$\frac{M}{E^{+}b}=\wp\cdot\left[\frac{\left(\int_{-h(x)}^{z_0}zdz+\alpha\int_{z_0}^{+h(x)}zdz\right)^2}{\int_{-h(x)}^{z_0}dz+\alpha\int_{z_0}^{+h(x)}dz}-\left(\int_{h(x)}^{z_0}z^2dz+\alpha\int_{z_0}^{+h(x)}z^2dz\right)\right] \tag{23}$$

Примем следующее обозначение:

$$K=\frac{1}{J_0}\left[\frac{\left(\int_{-h(x)}^{z_0}zdz+\alpha\int_{z_0}^{+h(x)}zdz\right)^2}{\int_{-h(x)}^{z_0}dz+\alpha\int_{z_0}^{+h(x)}dz}-\left(\int_{h(x)}^{z_0}z^2dz+\alpha\int_{z_0}^{+h(x)}z^2dz\right)\right] \tag{24}$$

$E^{+}J_0$ ($J=\frac{bh^3}{12}$) является жесткостью балки с прямоугольным поперечным сечением при изгибе. Учитывая (24) в (23), можем написать:

$$M=E^{+}J_0K(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{25}$$

Было принято – $h(x)=h_0\left(1+\varepsilon\frac{x}{l}\right)$, $\varepsilon\in[0{,}1]$. Вычислим выражение $K(x)$. Здесь, $h_0-$ двухкратная величина толщины балки с постоянным поперечным сечением, $l-$ длина балки ($\bar{x}=x\cdot l^{-1}$).

Вычислим интегралы $\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}dz$, $\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}zdz$, $\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}z^2dz$:

$$\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}dz=\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{z_0}dz+\alpha\int_{z_0}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}dz=z_0+h_0(1+\varepsilon\bar{x})+\alpha[h_0(1+\varepsilon\bar{x})-z_0]$$
$$=z_0(1-\alpha)+h_0(1+\varepsilon\bar{x})$$
$$\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}dz=z_0(1-\alpha)+h_0(1+\varepsilon\bar{x}) \tag{26}$$

$$\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{z_0}zdz+\alpha\int_{z_0}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}zdz=\frac{1}{2}\left[z_0^2-h_0^2(1+\varepsilon\bar{x})\right]+\frac{\alpha}{2}\left[h_0^2(1+\varepsilon\bar{x})^2-z_0^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}z_0^2(1-\alpha)-\frac{h_0^2}{2}(1-\alpha)(1+\varepsilon\bar{x})^2 \tag{27}$$

$$\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{z_0}z^2dz+\alpha\int_{z_0}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}z^2dz=\frac{1}{3}\left[z_0^3-h_0^3(1+\varepsilon\bar{x})^3\right]+\frac{\alpha}{3}\left[h_0^3(1+\varepsilon\bar{x})^3-z_0^3\right]$$
$$=\frac{1}{3}z_0^3(1-\alpha)-\frac{1}{3}(1+\alpha)h_0^3(1+\varepsilon\bar{x})^3 \tag{28}$$

Отметим, что для одномодульной балки с переменным поперечным сечением приведенные выше интегралы имеют следующие значения:

$$\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}dz=2h_0(1+\varepsilon\bar{x});\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{h_0(1+\varepsilon\bar{x})}zdz=0;\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}z^2dz=-\frac{2}{3}h_0^3(1+\varepsilon\bar{x})^3 \tag{29}$$

Для одномодульной балки с постоянной высотой получаются следующие значения:

$$\int_{-h_0}^{+h_0}dz=2h_0;\int_{-h_0}^{h_0}zdz=0;\int_{-h_0}^{+h_0}z^2dz=-\frac{2}{3}h_0^3 \tag{30}$$

Для упрощения вычислений мы отбросим члены пределы, где участвуют $\varepsilon^2$ и $\varepsilon^3$, потому что они очень малы по сравнению с другими.

Выражение (26) остается прежним.

Пределы для (27) и (28) записываются следующим образом:

$$\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}zdz\approx\frac{1}{2}z_0^2(1-\alpha)-\frac{h_0^2}{2}(1-\alpha)(1+2\varepsilon\bar{x})$$
$$\int_{-h_0(1+\varepsilon\bar{x})}^{+h_0(1+\varepsilon\bar{x})}z^2dz\approx\frac{1}{3}z_0^3(1-\alpha)-\frac{h_0^3}{3}(1-\alpha)(1+3\varepsilon\bar{x}) \tag{31}$$

Выражение функции $K$ записывается следующим образом:
Для одномодульной балки:

$$K=\frac{1}{J}\left[\frac{0}{2h_0(1+\varepsilon\bar{x})}-\frac{2}{3}h_0^3(1+\varepsilon\bar{x})\right]=-(1+3\varepsilon\bar{x}) \tag{32}$$

Для одномодульной балки:

$$K_V=-(1+3\varepsilon\bar{x}) \tag{33}$$

Тогда, дифференциальное уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(1+3\varepsilon\bar{x})\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]+\bar{C}_1(x)W-\bar{C}_2(x)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\rho h_0(1+\varepsilon\bar{x})\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0 \tag{34}$$

$$(1+3\varepsilon\bar{x})\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+3\varepsilon l^{-1}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+\bar{C}_1(x)W+\bar{C}_2(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\rho h_0(1+\varepsilon\bar{x})\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0 \tag{35}$$

Как видно, (35) является сложным уравнением, и при его решении мы используем разложение на переменные и метод ортогонализации Бубнова-Галеркина. На первом этапе определим изгиб $W$ следующим образом:

$$W=V(x)e^{i\omega t} \tag{36}$$

Функция $V(x)$ должна удовлетворять граничным условиям.
Если подставить выражение (36) в уравнении движения (35), то получим:

$$(1+3\varepsilon\bar{x})\frac{d^4 V}{dx^4}+3\varepsilon l^{-1}\frac{d^3 V}{dx^3}+\bar{C}_1(x)V-\omega^2[\bar{C}_2(x)+\rho_0 h(1+\varepsilon\bar{x})]V=0 \tag{37}$$

Уравнение (37) решается методом ортогонализации Бубнова-Галеркина. Функцию изгиба определим следующим образом:

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i\theta_i(x) \tag{38}$$

Здесь $b_i -$ неизвестные постоянные, каждый из $\theta_i(x)$ должен удовлетворять граничным условиям. С учетом (35) и (39) функция ошибки погрешности записывается следующим образом:

$$\eta(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i\left[(1+3\varepsilon\bar{x})\frac{d^4\theta_i}{dx^4}+3\varepsilon l^{-1}\frac{d^3\theta_i}{dx^3}+\bar{C}_i(x)-\omega^2\Big(\bar{C}_2(x)+\rho_0 h(1+\varepsilon\bar{x})\Big)\right]\theta_i\neq 0 \tag{39}$$

Ортогональность удовлетворяет следующему условию:

$$\int_0^l \eta(x)\,\theta_q dx=0;\ q=1,2,\ldots \tag{40}$$

При любом приближении $\omega^2$ определяется из системы линейных однородных уравнений, состоящих из $b_i$. Во избежание тривиального решения задачи, главный определитель системы (40) необходимо приравнять нулю.

$$\|\omega^2\|=0 \tag{41}$$

Уравнение (41) является $n -$ порядковым алгебраическим уравнением, и несмотря на то, что его решение сопровождается определенной трудностью, в инженерных расчетах удовлетворяются первым приближением, т.е. $\omega^2$ определяется следующим уравнением:

$$\int_0^l\left[(1+\varepsilon\bar{x})\frac{d^4\theta_1}{dx^4}+3\varepsilon l^{-1}\frac{d^3\theta_1}{dx^3}+\bar{C}_1(x)\theta_1-\omega^2[\bar{C}_2(x)+\rho_0 h_0(1+\varepsilon\bar{x})]\theta_1\right]\theta_1(x)=0 \tag{42}$$

Отсюда определяется $\omega^2$:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \left[(1+\varepsilon\bar{x})\frac{d^4\theta_1}{dx^4} + 3\varepsilon l^{-1}\frac{d^3\theta_1}{dx^3} + \bar{C}_1(x)\theta_1\right]\theta_1(x)dx}{\int_0^l [\bar{C}_2(x) + \rho_0 h_0(1+\varepsilon\bar{x})]\theta_1^2(x)dx} \tag{43}$$

Для численных расчетов необходимо задать конкретные значения функций $\theta_1(x)$; $C_1(x)$; $C_2(x)$. Производим вычисления для балки, концы которой закреплены шарнирами. В таком случае можно принять $\theta_1(x) = sin\frac{m\pi}{l}x$.

Рассмотрим случай, когда характеристики основания изменяются линейно по длине балки:

$$\bar{C}_1(x) = (1+\mu\bar{x})\bar{K}_1;\ \bar{C}_2(x) = (1+\mu\bar{x})\bar{K}_2 \tag{44}$$

С учетом (44) и $\theta_1(x) = sin\frac{m\pi}{l}x$, (43) записывается следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 (1+3\varepsilon\bar{x})\,sin\frac{m\pi}{l}x - 3\varepsilon\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3 \frac{1}{l^{-3}} cos\frac{m\pi}{l}x\right] sin\frac{m\pi}{l}xdx}{\int_0^l [K_2(1+\mu\bar{x}) + \rho_0 h_0(1+\varepsilon\bar{x})]\,sin^2\frac{m\pi}{l}xdx} + \frac{\int_0^l \left[\bar{K}_1(1+\mu\bar{x})\,sin\frac{m\pi}{l}x\right] sin\frac{m\pi}{l}xdx}{\int_0^l [\bar{K}_2(1+\mu\bar{x}) + \rho_0 h_0(1+\varepsilon\bar{x})]\,sin^2\frac{m\pi}{l}xdx} \tag{45}$$

После некоторых элементарных преобразований получим:

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 (1+1{,}5\varepsilon) + \bar{K}_1(1+0{,}5\mu)}{\bar{K}_2(1+0{,}5\mu) + \rho_0 h_0(1+0{,}5\varepsilon)} \tag{46}$$

Из функции (46) можно вывести следующие частные случаи:

1. Не учитывается сопротивление внешней среды:

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 (1+1{,}5\varepsilon)}{\rho_0 h_0(1+0{,}5\varepsilon)} = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 (\rho_0 h_0)^{-1}\frac{1+1{,}5\varepsilon}{1+0{,}5\varepsilon} \tag{47}$$

2. Балка имеет постоянную толщину, сопротивление внешней среды не учитывается.

$$\omega^2 = \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 \frac{1}{\rho_0 h_0} \tag{48}$$

3. Балка имеет постоянное поперечное сечение и учитывается сопротивление внешней среды:

$$\omega^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + \bar{K}_1(1+0{,}5\mu)}{\bar{K}_2(1+0{,}5\mu) + \rho_0} \tag{49}$$

4. Балка находится на основании типа Vinkler:

$$\omega_V^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 (1+1{,}5\varepsilon) + \bar{K}_1(1+0{,}5\mu)}{\rho_0 h_0(1+0{,}5\varepsilon)} \tag{50}$$

5. Балка с постоянной толщиной находится на основании типа Vinkler:

$$\omega_V^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + \bar{K}_1}{\rho_0 h} \tag{51}$$

Результаты вычислений, проведенных для частных случаев, представлены в таблицах и в виде кривых соответствующих зависимостей.

Таблица 1 – Зависимость между частотой ($\bar{\omega}_*^2$) и параметром, характеризующим неоднородность

| $\varepsilon$ | $\omega_*^2 = \dfrac{1+0{,}5\varepsilon}{1+1{,}5\varepsilon}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0,2 | 0,846 |
| 0,4 | 0,75 |
| 0,6 | 0,984 |
| 0,8 | 0,636 |
| 1,0 | 0,6 |

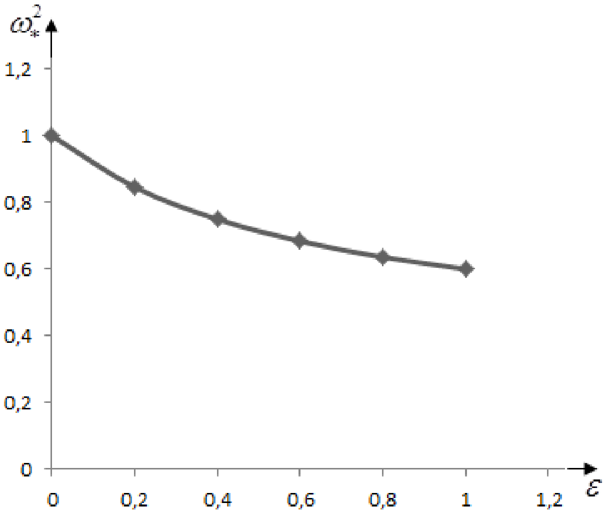


Рис. 1 – Зависимость между частотой ($\bar{\omega}_*^2$) и параметром, характеризующим неоднородность

Чтобы произвести вычисления для усложненного случая, запишем выражение (46) следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{\left(\dfrac{m\pi}{l}\right)^4 + \bar{K}_1 \dfrac{(1+0{,}5\mu)}{1+1{,}5\varepsilon}}{\bar{K}_2 \dfrac{1+0{,}5\mu}{1+1{,}5\varepsilon} + \rho_0 h_0 \dfrac{(1+0{,}5\varepsilon)}{1+1{,}5\varepsilon}} \tag{52}$$

Примем следующую замену:

$$n_1 = \frac{1+0{,}5\mu}{1+1{,}5\varepsilon};\ n_2 = \frac{1+0{,}5\varepsilon}{1+1{,}5\varepsilon} \tag{53}$$

Учитывая (53), можем записать выражение (52) следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{\left(\dfrac{m\pi}{l}\right)^4 + n_1\bar{K}_1}{n_1\bar{K}_2 + \rho_0 n_2 h_0} \tag{54}$$

Зависимости параметров $n_1$ и $n_2$ от $\varepsilon$ и $\mu$ представлены в таблицах и в виде кривых соответствующих зависимостей.

Таблица 2 – Зависимость между параметрами, характеризующими вариабельность высоты и неоднородность основания

| $\varepsilon$ | $n_1$ | | |
|---|---|---|---|
| | $\mu = 0$ | $\mu = 0{,}5$ | $\mu = 1{,}0$ |
| 0 | 1 | 1,25 | 1,5 |
| 0,2 | 0,769 | 0,961 | 1,153 |
| 0,4 | 0,625 | 0,781 | 0,937 |
| 0,6 | 0,526 | 0,657 | 0,789 |
| 0,8 | 0,454 | 0,568 | 0,681 |
| 1,0 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |

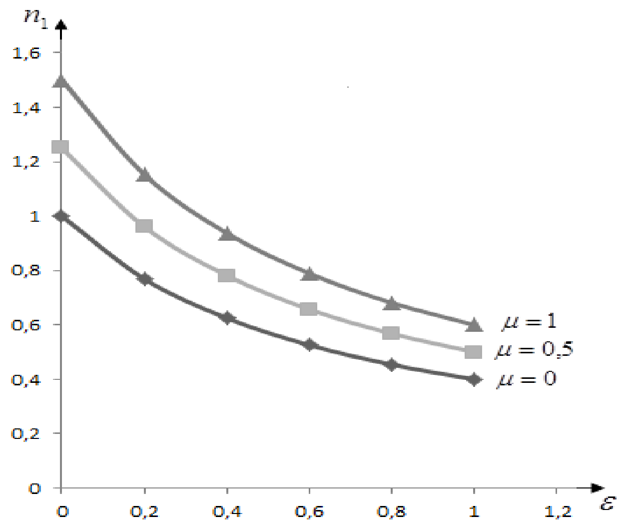


Рис. 2 – Зависимость между параметрами, характеризующими вариабельность высоты и неоднородность основания

Таблица 3 – Зависимость между параметрами, характеризующими высоту балки

| $\varepsilon$ | $n_2$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0,2 | 0,846 |
| 0,4 | 0,75 |
| 0,6 | 0,684 |
| 0,8 | 0,636 |
| 1,0 | 0,6 |

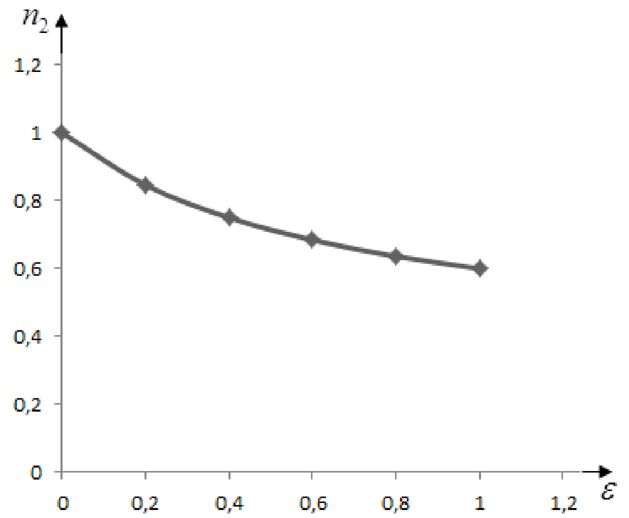


Рис. 3 – Зависимость между параметрами, характеризующими высоту балки

Следует отметить, что нетрудно произвести вычисления при изменении характеристик основания по другим законам.

**Conflict of Interest**

None declared.

**Конфликт интересов**

Не указан.

**Список литературы / References**

1. Толоконников Л.А. О связи между напряжениями и деформациями в разномодульных изотропных средах / Л.А. Толоконников // Инж. журнал. МТТ. – 1968. – № 6. – С. 108–110.
2. Новацкий В. Динамика сооружений. / В. Новацкий – М.: Госстройиздат, 1963 – 376 с.
3. Gadjiev V.D. Lateral oscillations of a beam made of multi-modulus material lying on inhomogeneous visco-elastic foundation / V.D. Gadjiev, N.S. Rzayev // Transaction of NAS of Azerbaijan. – 2014. – Vol. XXXIV. – No. 1. – pp. 125–130.
4. Gadjiev V.D. Oscilllations of a nonhomogeneous different modulus beam with a load moving on it situated on nonhomogeneous viscoelastic foundation / V.D. Gadjiev, N.S. Rzayev // Transaction of NAS of Azerbaijan. – 2013. – Vol. XXXIII. – No. 4. – pp. 133–138.
5. Рзаев Н.С. Свободное колебание неоднородного разномодульного стержня, лежащего на двухконстантов основани / Н.С. Рзаев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. – № 6. – С. 38–43.

6. Рзаев Н.С. Об устойчивости плоской формы изгиба балок, изготовленных из материала разносопротивляющихся и сжатию / Н.С. Рзаев // Elmi əsərlər [Научные труды] – 2016. – 1. – №3. – С. 172–176.
7. Рзаев Н.С. К устойчивости упруго пластического стержня лежащей на неоднородно упругом основании / Н.С. Рзаев // Nəzəri və tətbiqi mexanika jurnalı [Журнал теоретической и прикладной механики] – 2014, №2. – С.132–137.
8. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов поете. / П.Л. Пастернак – М.: Сройиздат, 1954. – 89 с.
9. Гасымов Г.М. Поперечное колебание стержня лежащего на неоднородно вязко-упругом основании / Г.М. Гасымов, Н.С. Рзаев // Elmi əsərlər [Научные труды] – 2013. – 1. – № 3. – С. 41–45.
10. Гаджиев В.Д. Собственное колебание ортотропной круговой пластинки лежащей на неоднородно вязко-упругом основании / В.Д. Гаджиев // Вестник современной науки – Россия, Волгоград, 2016. – №5. – С. 20–24.

**Список литературы на английском языке / References in English**

1. Tolokonnikov L.A. O svyazi mezhdu napryazheniyami i deformaciyami v raznomodul'nyh izotropnyh sredah [On the relationship between stresses and deformations in multi-modulus isotropic media] / L.A. Tolokonnikov // Inzh. zhurnal. MTT [Eng. journal. MTT]. – 1968. – No. 6. – pp. 108–110 [in Russian]
2. Novatsky V. Dinamika sooruzhenij [Dynamics of structures] / V. Novatsky – M: State Constructing Publishing House, 1963. – 376 p. [in Russian]
3. Gadjiev V.D. Lateral oscillations of a beam made of multi-modulus material lying on inhomogeneous visco-elastic foundation / V.D. Gadjiev, N.S. Rzayev // Transaction of NAS of Azerbaijan. – 2014. – Vol. XXXIV. – No. 1. – pp. 125–130.
4. Gadjiev V.D. Oscilllations of a nonhomogeneous different modulus beam with a load moving on it situated on nonhomogeneous viscoelastic foundation / V.D. Gadjiev, N.S. Rzayev // Transaction of NAS of Azerbaijan. – 2013. – Vol. XXXIII. – No. 4. – pp. 133–138.
5. Rzaev N.S. Cvobodnoe kolebanie neodnorodnogo raznomodul'nogo sterzhnya, lezhashchego na dvuhkonstantov osnovani [Free oscillation of an inhomogeneous multi-modulus rod lying on a two-constant base] / N.S. Rzaev // Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij [Construction mechanics of engineering structures and structures]. – 2016. – № 6. – pp. 38–43 [in Russian]
6. Rzaev N.S. Ob ustojchivosti ploskoj formy izgiba balok, izgotovlennyh iz materiala raznosoprotivlyayushchihsya i szhatiyu [On the stability of the flat shape of the bending of beams made of a material that is highly resistant to compression] / N.S. Rzaev // Elmi əsərlər [Scientific works]. – 2016. – 1. – №3. – pp.172–176 [in Russian]
7. Rzaev N.S. K ustojchivosti uprugo plasticheskogo sterzhnya lezhashchej na neodnorodno uprugom osnovanii [To the stability of an elastic plastic rod lying on an inhomogeneously elastic base] / N.S. Rzaev // Nəzəri və tətbiqi mexanika jurnalı [Journal of Theoretical and Applied Mechanics] – 2014, №2. – pp.132–137 [in Russian]
8. Pasternak P.L. Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvuh koefficientov poete [The basics of a new method for calculating foundations on an elastic foundation using two poete coefficients] / P.L. Pasternak. – Moscow: Construction Publishing House, 1954. – 89 p. [in Russian]
9. Gasymov G.M. Poperechnoe kolebanie sterzhnya lezhashchego na neodnorodno vyazko-uprugom osnovanii [Transverse oscillation of a rod lying on an inhomogeneously viscoelastic base] / G.M. Gasymov, N.S. Rzaev // Elmi əsərlər [Scientific works]. – 2013. – 1. – № 3. – pp. 41–45 [in Russian]
10. Gadzhiev V.D. Sobstvennoe kolebanie ortotropnoj krugovoj plastinki lezhashchej na neodnorodno vyazko-uprugom osnovanii [Proper oscillation of an orthotropic circular plate lying on an inhomogeneously viscoelastic base] / V.D. Gadzhiev // Vestnik sovremennoj nauki [Bulletin of Modern Science] – Russia, Volgograd, 2016. – №5. – pp. 20–24 [in Russian]