

**ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ/BASES AND FOUNDATIONS,
UNDERGROUND STRUCTURES**DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9>

EDN: ENEZNV

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ КУЛОНА-МОРА ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМЫ «СВАЯ-ГРУНТ»

Научная статья

Матвеев Е.А.^{1,*}, Цимбельман Н.Я.², Животов В.А.³¹ORCID : 0009-0003-1009-4004;²ORCID : 0000-0002-6552-3000;^{1,2,3} Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Российская Федерация³ Владивостокский государственный университет, Владивосток, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (matveev.ea[at]dvfu.ru)

Предложена: 23.04.2026; Принята: 19.05.2026; Опубликовано: 21.05.2026

Аннотация

В статье рассмотрены особенности применения модели грунта Кулона–Мора для численного моделирования напряжённо-деформированного состояния системы «свая-грунт» при действии вдавливающих и выдергивающих нагрузок.

Исследование выполнено с использованием численной модели в специализированном геотехническом программном комплексе Plaxis 3D на примере одиночной буронабивной сваи в массиве грунта. Представлены математические основы итерационного расчёта с коррекцией напряжений и реализаций критерия текучести Кулона–Мора. Приведены результаты многостадийных расчётов с постоянным шагом нагружения.

Установлено, что при вдавливании модель качественно и количественно воспроизводит теоретическую картину развития зон пластичности под пятой и по боковой поверхности.

Для случая выдергивания выявлены особенности в виде отслоения грунта в верхней части сваи и отрыва подошвы, что несколько расходится с классическими представлениями состоящими в том, что однородный грунт вокруг сваи разрушается с верхней части по боковой поверхности.

Выполнен анализ чувствительности к изменению удельного сцепления, угла внутреннего трения, угла дилатансии и коэффициента прочности интерфейса.

Ключевые слова: модель грунта Кулона-Мора, численное моделирование, система «свая-грунт», напряжённо-деформированное состояние, буронабивная свая, вдавливающая нагрузка, выдергивающая нагрузка, пластические деформации, критерий текучести, метод конечных элементов, анализ чувствительности, контактные элементы.

THE APPLICATION OF THE COULOMB-MOHR MODEL IN THE NUMERICAL SIMULATION OF THE "PILE-SOIL" SYSTEM

Research article

Matveev E.A.^{1,*}, Tsimbelman N.Y.², Zhivotov V.A.³¹ORCID : 0009-0003-1009-4004;²ORCID : 0000-0002-6552-3000;^{1,2,3} Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation³ Vladivostok State University, Vladivostok, Russian Federation

* Corresponding author (matveev.ea[at]dvfu.ru)

Suggested: 23.04.2026; Accepted: 19.05.2026; Published: 21.05.2026

Abstract

The article examines the specific traits of applying the Coulomb–Mohr soil model to numerically simulate the stress-strain state of the "pile-soil" system under pressing and pull-out loads.

The study was carried out using a numerical model within the specialised geotechnical software package Plaxis 3D, on the example of a single bored pile in a soil mass. The mathematical foundations of the iterative calculation, including stress correction and implementations of the Coulomb–Mohr yield criterion, are presented. The results of multi-stage calculations with a constant loading increment are provided.

It has been established that, under pressure, the model accurately reproduces, both qualitatively and quantitatively, the theoretical pattern of plasticity zone development beneath the heel and along the lateral surface.

In the case of pulling out, specific features have been identified, such as soil fracture at the top of the pile and separation of the pile toe; this differs somewhat from the conventional view that homogeneous soil around a pile is destroyed from the top downwards along the lateral surface.

A sensitivity analysis has been carried out with respect to changes in the specific adhesion, the angle of internal friction, the angle of dilation and the interface strength coefficient.

Keywords: Coulomb–Mohr soil model, numerical simulation, “pile-soil” system, stress–strain state, bored pile, pressing load, pull-out load, plastic deformations, yield criterion, finite element method, sensitivity analysis, contact elements.

Введение

Свайные фундаменты широко применяются в современном строительстве в различных инженерно-геологических условиях. Согласно СП 24.13330.2011 [2], основное назначение свай — прорезка слабых слоёв грунта, залегающих с поверхности, передача нагрузки на нижележащие более прочные слои, а также обеспечение требуемых деформационных характеристик оснований за счёт снижения осадок. Благодаря этим свойствам свайные фундаменты остаются одним из наиболее эффективных типов оснований при возведении зданий и сооружений в сложных грунтовых условиях.

Помимо передачи сжимающих усилий, свайные фундаменты часто воспринимают выдергивающие нагрузки, возникающие в опорах линий электропередач, антенно-мачтовых сооружениях, и других конструкций. В таких условиях сваи незаменимы, так как только они способны обеспечить необходимую несущую способность на выдёргивание за счёт сопротивления по боковой поверхности и конструктивных особенностей.

В соответствии со статьей 16 Федерального закона 384-ФЗ от 30.12.2009 [7] для подтверждения безопасности принятых проектных решений необходимо выполнить расчеты конструкций и оснований. Действующие нормативные документы, в частности СП 24.13330 [5], предлагают три основные методики расчёта свайных фундаментов:

- определение расчётного сопротивления грунта под пятой и по боковой поверхности сваи;
- расчёт устойчивости сваи в грунте при действии вертикальных и горизонтальных нагрузок;
- расчёт осадки сваи методом послойного суммирования.

Однако, в последние годы применение этих методов становится менее эффективным. Это связано со строительством в более сложных инженерно-геологических условиях, разнообразием конструктивных форм свай, появлением новых технологий их устройства, а также необходимостью учёта нелинейного поведения грунтов и совместной работы элементов системы «свая–грунт» в теснённых условиях городской застройки. Нормативные подходы часто не охватывают всё многообразие реальных ситуаций.

Для более точного моделирования напряжённо-деформированного состояния грунтовых массивов и учёта факторов, не предусмотренных упрощёнными методиками, в современной геотехнической практике всё шире применяется метод конечных элементов (МКЭ), реализованный в специализированных геотехнических программных комплексах.

Таким образом, целью настоящего исследования является — на примере тестовой численной модели буронабивной сваи, выполненной в геотехническом программном комплексе, продемонстрировать особенности процессов формирования пластических деформаций в грунте при вдавливании и выдергивании сваи с использованием модели грунта Кулона–Мора, выполнить анализ чувствительности модели к изменению основных параметров, а также сопоставить полученные результаты с теоретическими представлениями о работе данной модели.

Методы и принципы исследования

Для построения численной модели используется метод конечных элементов применительный к практике строительных расчетов [3]. Математическая модель пластического материала подробно описана в труде [8]. Для учета упруго-пластического поведения материала используется итерационный метод решения с учетом формулы пластической коррекции напряжения [12]:

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + D^e * (\Delta \epsilon - \Delta \epsilon_{\text{пласт.}}), \quad (1)$$

где $\Delta \epsilon_{\text{пласт.}}$ — приращение пластических деформаций, D^e — матрица упругого материала, $\Delta \epsilon$ — приращение общих деформаций.

Суть данного метода состоит в том, что постепенное увеличение нагрузки по шагам пропорционально увеличивает напряжение, до появления пластических деформаций, но с появлением пластических деформаций напряжение начинает изменяться непропорционально. Так как напряжения изменяются непропорционально нагрузке появляется ненулевая разница между внутренними и внешними силами, которые записываются в вектор-небаланс и прикладываются снова к расчетной схеме вызывая дополнительные деформации и изменения напряжений. Процесс продолжается до тех пор, пока доля в процентах невязки вектора-небаланса от внешних сил будет меньше допустимого. Более подробно данный процесс описан в источниках [1] и [12].

Для определения пластических деформаций в большинстве геотехнических комплексов используется формула Вермеера [14].

$$\Delta \epsilon_{\text{пласт.}} = \frac{f(\sigma)}{d+h} * \left(\frac{dg}{d\sigma} \right), \quad (2)$$

где $f(\sigma)$ — функция условия текучести материала; d — скалярный параметр пластического течения; h — параметр упрочнения; $(dg)/(d\sigma)$ — производная функции пластического потенциала.

Модель грунта с критерием прочности Кулона-Мора в программном комплексе реализована с использованием функции текучести $f(\sigma)$ и функции пластического потенциала g , которые в пространстве главных напряжений задаются уравнениями Смита и Гриффина [13]. Одно из шести уравнений, описывающих функцию текучести, имеет вид [10]:

$$f_{1a} = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) + \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) * \sin(\varphi) - c * \cos(\varphi) \leq 0 \quad (3)$$

Где φ — угол внутреннего трения, c — сцепление, σ — главные напряжения.

Соответствующее уравнение пластического потенциала записывается как [10]:

$$g_{1a} = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) + \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \sin(\psi) \quad (4)$$

Где, ψ — угол дилатансии, σ — главные напряжения.

Остальные уравнения для граней поверхности текучести и пластического потенциала строятся аналогичным образом. Более подробно функция текучести f и функция пластического потенциала g в описывается в источниках [1] и [10].

При испытании на выдергивание согласно СП 24.13330.2011 [5] сваи работают только за счёт сопротивления грунта по боковой поверхности. Следовательно, перемещения сваи определяются исключительно сдвиговой жесткостью грунта G . Отображение работы сваи при выдергивании в численной модели для упругого и упругопластического состояний при использовании модели Кулона-Мора представлено на рисунке 1.

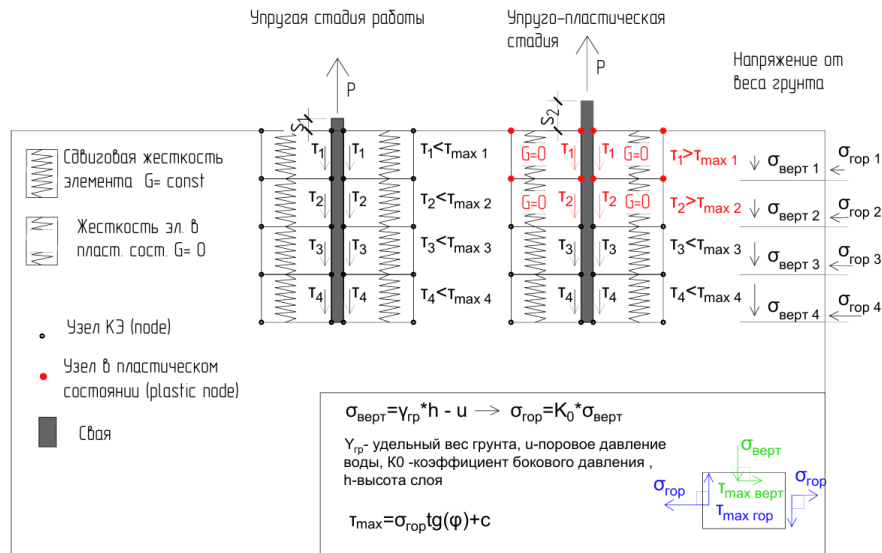


Рисунок 1 - Работа модели грунта Кулона-Мора при выдергивании сваи
DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.1>

При испытаниях на вдавливающую нагрузку согласно СП 24.13330.2011 [5] нагрузку воспринимает грунт, расположенный вдоль боковой поверхности и грунт под пятой сваи. Отображение работы сваи при вдавливании в численной модели в упругом и упругопластическом состоянии при использовании модели Кулона-Мора представлено на рисунке 2.

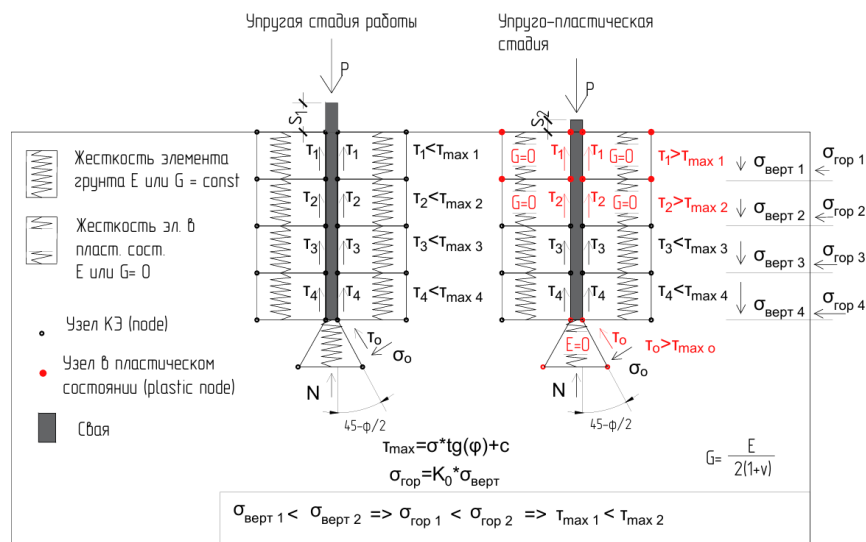


Рисунок 2 - Работа модели грунта Кулона-Мора при вдавливании сваи
DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.2>

Численное моделирование напряжённо-деформированного состояния системы «свая-грунт» выполнялось в геотехническом программном комплексе Plaxis 3D. Объектом исследования являлась одиночная буронабивная свая диаметром 600 мм и длиной 10 м. Геометрическая схема модели соответствовала условиям работы сваи в массиве однородного грунта.

Расчётная область принята размерами 16×16 м в плане и глубиной 20 м. Конечно-элементная сетка построена на основе тетраэдрических элементов со сгущением к центру модели. Наибольшая плотность сетки сосредоточена в зоне контакта «свая-грунт». Минимальный размер стороны элемента в этой зоне составляет 0,17 м, средний — 0,33 м, по направлению к периферии модели средний размер стороны элемента плавно возрастает до 1,41 м.

На боковых границах расчётной области введены ограничения горизонтальных перемещений, на нижней грани — ограничения вертикальных перемещений.

В качестве критерия сходимости на каждом шаге нагружения задана допустимая относительная невязка между внутренними и внешними силами, равная 0,01 (1%).

Физико-механические характеристики грунта были приняты в соответствии с таблицей А.2 СП 22.13330.2016 [4]. В качестве основания был использован суглинок мягкопластичный. Материал тела сваи моделировался как линейно-упругое изотропное тело с характеристиками тяжелого бетона класса В25 согласно СП 63.13330.2018 [6].

Основные параметры материалов, принятые в расчётной схеме, приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Основные параметры материалов

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.3>

Параметр	Обозн.	Ед. изм.	Грунт (Суглинок)	Свая (Бетон)
Модуль упругости	E	МПа	17	30000
Угол внутреннего трения	φ	град	19	-
Сцепление	c	кПа	25	-
Удельный вес	γ	кН/м ³	19	25
Коэффициент пористости	e	-	0,65	-
Коэффициент Пуассона	ν	-	0,35	0,2
Показатель текучести	I_L	-	0,51	-

Для учёта взаимодействия разнородных материалов (грунт и бетон) в расчётной схеме использовались специальные контактные элементы (интерфейсы). Данные элементы позволяют корректно моделировать сопряжение объёмных конечных элементов грунта и конструкции, описывая взаимодействие вдоль поверхности контакта. В программном комплексе объёмные элементы грунта и сваи представлены 10-узловыми тетраэдрами [9], тогда как интерфейс между ними моделируется плоскими 6-узловыми треугольными элементами с заданной виртуальной толщиной. Схема сопряжения указанных элементов, выполненная на основе данных [11], и [12] представлена на рисунке 3.

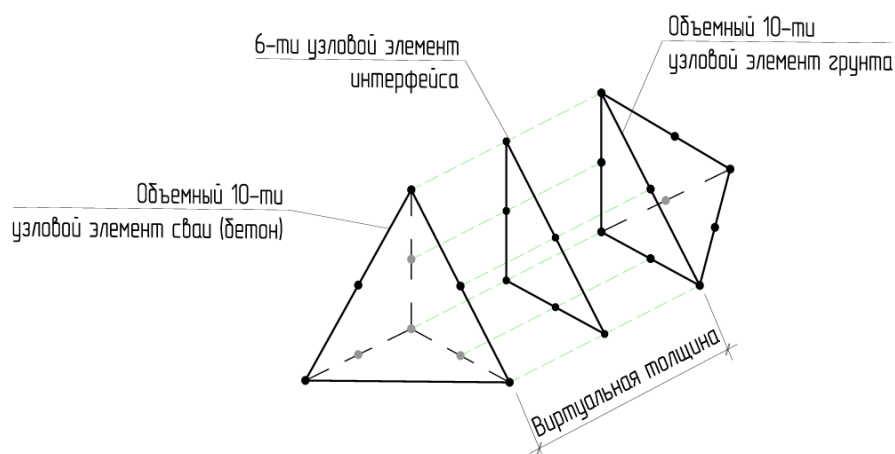


Рисунок 3 - Сопряжение разнородных объёмных элементов через интерфейс

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.4>

Для исключения заземления крайних узлов в соответствии с рекомендациями [11, С. 32] интерфейсные элементы были продлены на 0,1 м в верхней части (рис. 4) и аналогично в нижней части сваи.

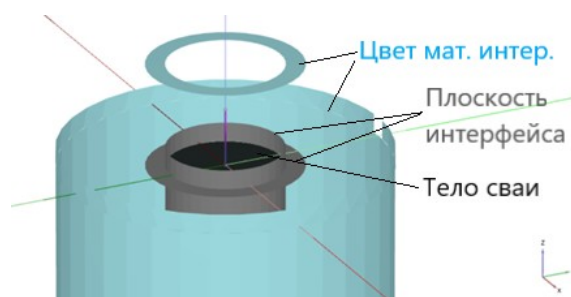


Рисунок 4 - Продление интерфейсных элементов сваи

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.5>

Для моделирования контакта между буронабивной сваей и грунтом был назначен параметр прочности интерфейса $R_{inter} = 0,7$, при этом прочностные характеристики и критерий прочности соответствуют грунту. Расчёт выполнялся многостадийно с постоянным шагом увеличения нагрузки на 100 кН как для случая вдавливания, так и для выдергивания.

Результаты расчетов на выдергивание

Результаты расчёта перемещений сваи в зависимости от нагрузки по стадиям при выдергивающем нагружении с постоянным шагом сведены в таблицу 2.

Таблица 2 - Результаты расчета на выдергивание

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.6>

Нагрузка кН	Перемещение мм	Приращение мм
0	0	
100	0,95	0,95
200	2,04	1,09
300	3,15	1,11
400	4,26	1,11
500	5,41	1,15
600	6,74	1,33
700	23,57	16,83
800	коллапс	-

Анализ приращений перемещений показывает, что до нагрузки 100 кН перемещения увеличиваются с меньшим приращением; линейный участок сохраняется в диапазоне от 200 до 400 кН. Далее наблюдается незначительный рост перемещений, однако после 600 кН приращения существенно возрастают, а при достижении 800 кН наступает «коллапс модели» (отсутствие сходимости решения).

Распределение зон пластического течения по стадиям нагружения в зависимости от величины нагрузки представлено на рисунке 5.

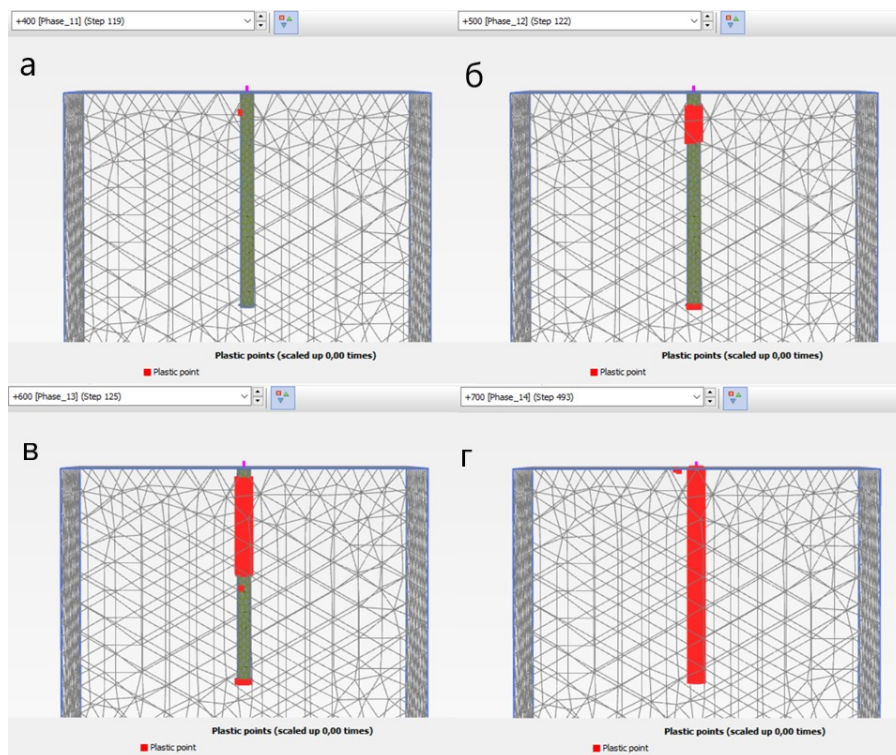


Рисунок 5 - Появление точек текучести по стадиям нагружения при выдергивании:
 а – при 400 кН; б – при 500 кН; в – при 600 кН; г – при 700 кН
 DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.7>

Анализ данных рисунка 5 показывает, что точки текучести начинают появляться при нагрузке 400 кН, и в дальнейшем их количество увеличивается, что согласуется с данными таблицы 2, согласно которым после нагрузки 400 кН возрастают приращения перемещений.

Точки текучести формируются преимущественно в верхней части сваи, как и в теоретической схеме (рис. 1), однако имеются существенные отличия. Они начинают появляться на некотором расстоянии от верха сваи, и наблюдается «отслоение» грунта от тела сваи (рис. 6), которое сохраняется вплоть до достижения предельного состояния. Кроме того, фиксируется появление точек текучести в зоне соприкосновения пяты сваи с грунтом, что свидетельствует об отрыве подошвы.

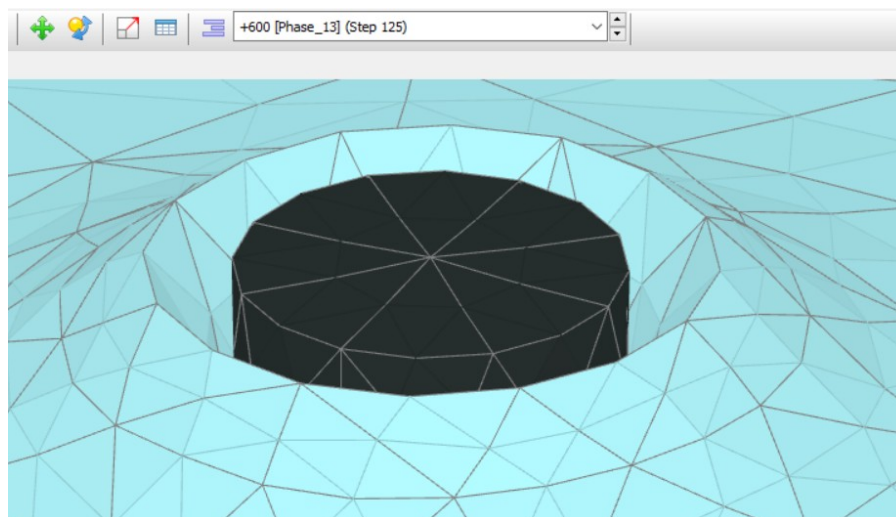


Рисунок 6 - Отслоение верхней части грунта от сваи
 DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.8>

График зависимости перемещений от нагрузки (без учёта последней стадии расчёта) с добавленной линией упругого поведения и отмеченной точкой начала образования точек пластического течения представлен на рисунке 7.

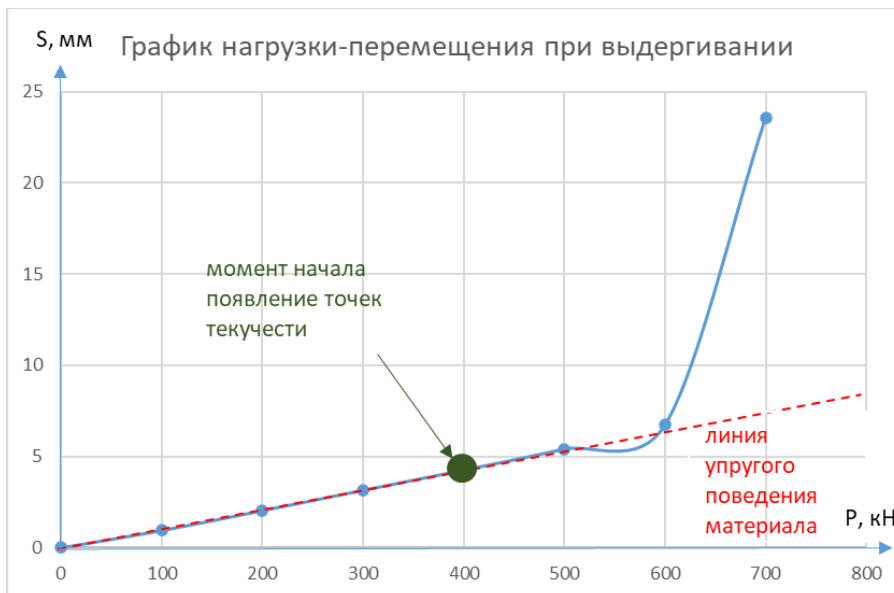


Рисунок 7 - График нагрузки-осадки и линия упругого поведения
 DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.9>

Также был выполнен анализ чувствительности модели к изменению отдельных параметров. Для каждого из рассматриваемых параметров выполнялась серия расчётов, в которой варьировался только один параметр, а все остальные оставались неизменными (соответствовали значениям, приведённым в таблице 1). По результатам расчётов строились графики зависимости перемещений от нагрузки, представленные на рисунке 8.

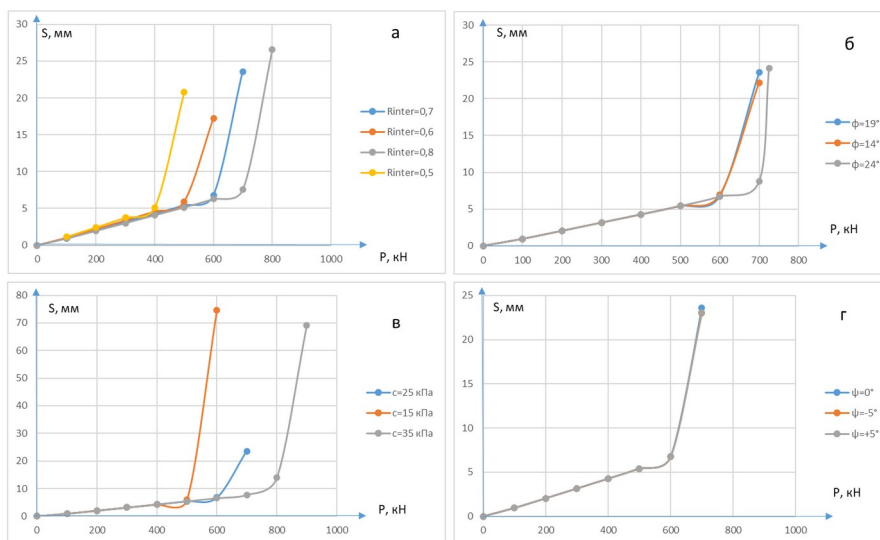


Рисунок 8 - Графики нагрузки-перемещения при:
 а - изменение коэф. прочности интерфейса; б - изменения угла внутреннего трения; в - изменение сцепления; г - изменение угла дилатансии
 DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.10>

Анализ графиков (рис. 8) показывает, что увеличение сцепления c и коэффициента прочности интерфейса R_{inter} , приводит к удлинению упругого участка зависимости «нагрузка-перемещение». Изменение угла внутреннего трения ϕ до определённого значения практически не влияет на форму графика, однако при дальнейшем росте угла внутреннего трения на кривой появляется промежуточная точка, располагающаяся выше линии упругого поведения.

Для рассматриваемого грунта принятие ненулевого значения угла дилатансии физически не обосновано. Положительный угол дилатансии означает увеличение объёма при сдвиге, отрицательный — его уменьшение [1], [2] и [15]. Угол дилатансии ψ , в рамках выполненных расчётов не оказывает существенного влияния на результаты.

Результаты расчетов на вдавливание

Результаты расчёта перемещений сваи в зависимости от нагрузки по стадиям при вдавливающем нагружении с постоянным шагом сведены в таблицу 3.

Таблица 3 - Результаты расчетов на вдавливающую нагрузку

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.11>

Нагрузка кН	Перемещение мм	Приращение мм
0	0	
100	-1,08	-1,08
200	-2,15	-1,07
300	-3,23	-1,08
400	-4,3	-1,07
500	-5,38	-1,08
600	-6,68	-1,3
700	-12,5	-5,82
800	-29,17	-16,67
900	-61,29	-32,12

На основании анализа приращений перемещений (таблица 3) можно сделать вывод, что при вдавливающей нагрузке в диапазоне от 0 до 500 кН наблюдается упругое поведение системы «свая–грунт»: перемещения линейно возрастают с увеличением нагрузки, о чём свидетельствуют практически постоянные приращения ($\approx 1,07$ – $1,08$ мм на каждые 100 кН). При нагрузке 600 кН приращение возрастает до 1,3 мм, что указывает на начало формирования точек пластического течения. Дальнейшее увеличение нагрузки (700 кН и более) сопровождается резким ростом приращений перемещений, что соответствует активному развитию зон пластичности, подтверждаемому распределением точек пластического течения (рис. 9). Таким образом, предельное сопротивление грунта под пятой и по боковой поверхности сваи в рассмотренных условиях достигается при нагрузке 600–700 кН, после чего наступает стадия неограниченного нарастания осадок.

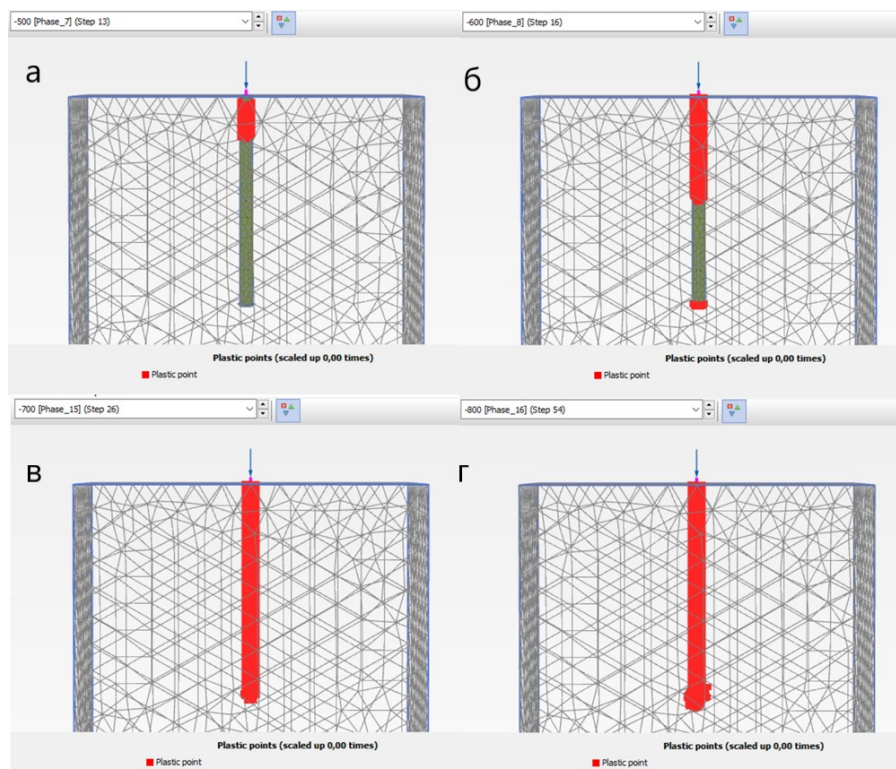


Рисунок 9 - Появление пластических точек по стадиям нагружения при вдавливании:
 а – при 500 кН; б – при 600 кН; в – при 700 кН; г – при 800 кН

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.12>

Анализ рисунка 9 показывает, что точки пластического течения начинают появляться при нагрузке 500 кН, причём они фиксируются как под пятой сваи, так и по боковой поверхности, что полностью согласуется с теоретической схемой (рис. 2). После превышения нагрузки 700 кН зоны текучести формируются только под пятой сваи, что свидетельствует о том, что свая начинает работать преимущественно за счёт сопротивления грунта под пятой. Данный вывод согласуется с результатами исследований [16].

График зависимости «нагрузка-осадка» с обозначенной линией упругого поведения и точкой начала образования зон текучести представлен на рисунке 10.

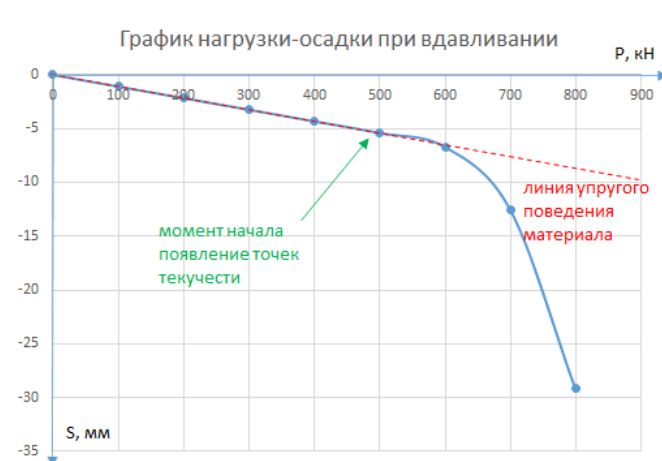


Рисунок 10 - График нагрузки-осадки
DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.13>

Анализ чувствительности модели к изменению параметров, выполненный аналогично модели на выдергивание, представлен на рисунке 11.

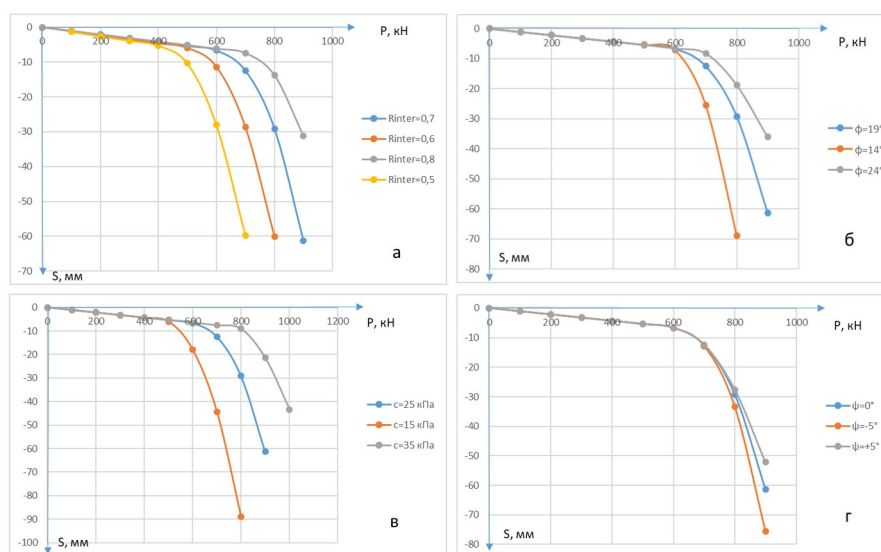


Рисунок 11 - Графики нагрузки-осадки при:
а - изменение коэф. прочности интерфейса; б - изменения угла внутреннего трения; в - изменение сцепления; г - изменение угла дилатансии

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.14>

Анализ рисунка 11 показывает, что сцепление грунта с влияет на протяжённость упругого участка зависимости «нагрузка-перемещение», однако форма кривой после перехода в пластическую область остаётся неизменной. Угол внутреннего трения ϕ существенно влияет на форму кривой: более высокие значения ϕ делают её более пологой. Положительный угол дилатансии ψ также способствует незначительному выполаживанию графика. Это объясняется тем, что при увеличении объёма грунта в зонах текучести возрастают напряжения в соседних элементах, что повышает их предельные касательные напряжения. При отрицательном угле дилатансии наблюдается обратный эффект: уменьшение объёма приводит к снижению напряжений и, соответственно, уменьшению предельных касательных напряжений, воспринимаемых элементом.

Заключение

При вдавливающей нагрузке результаты расчёта качественно и количественно соответствуют теоретическим представлениям о работе свайного фундамента. Формирование зон пластических деформаций начинается при достижении определенной нагрузки (в данном примере это 500 кН), причём точки пластического течения фиксируются как под пятой сваи, так и по боковой поверхности, что согласуется с расчётной схемой (рис. 2).



Дальнейшее увеличение нагрузок приводит к тому, что свая перестает работать по боковой поверхности и воспринимает нагрузку только за счет пяты, в данном примере это состояние наступило при 700 кН; это объясняется тем, что области текучести локализируются преимущественно под пятой сваи. Данный эффект подтверждается известными экспериментальными данными [16].

Для выдергивающей нагрузки выбранная численная модель с принятыми характеристиками грунта воспроизводит общую последовательность деформирования: упругая стадия (до 400 кН), начало пластических деформаций (400–600 кН) и достижение предельного состояния (700–800 кН). Однако выявлены существенные отличия от классической схемы (рис. 1):

- зоны текучести возникают на некотором удалении от головы сваи, а в верхней части контакта наблюдается явление «отслоения» грунта от тела сваи (рис. 6);

- в зоне соприкосновения пяты сваи с грунтом также фиксируется отрыв, сопровождающийся появлением пластических точек.

Такое поведение может быть связано с особенностями реализации контактных элементов и требует дополнительного исследования.

Анализ чувствительности модели показал, что при вдавливании наибольшее влияние на несущую способность и форму кривой «нагрузка–осадка» оказывают угол внутреннего трения φ , угол дилатансии ψ , а сцепление c влияет преимущественно на длину упругого участка. При выдергивании ключевыми параметрами являются сцепление c и коэффициент прочности интерфейса R_{inter} , тогда как влияние φ и ψ выражено слабее.

Выявленные особенности работы модели Кулона-Мора при выдергивании (несовпадение зон пластичности с теоретической схемой, отрыв грунта в верхней части контакта и под пятой, немонотонное влияние параметров) указывают на необходимость дальнейших исследований. В перспективе целесообразно выполнить верификацию численной модели на основе натурных или лабораторных экспериментов, а также рассмотреть применение более совершенных моделей грунта.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Сообщество рецензентов журнала «Современное строительство и архитектура».

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.15>

Conflict of Interest

None declared.

Review

Community of Reviewers of the Modern Construction and Architecture.

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2026.72.9.15>

Список литературы / References

1. Мирный А.Ю. Математические модели грунтов для инженеров: монография / А.Ю. Мирный, А.С. Мосина. — Москва: Гео Инфо, 2024. — 416 с.
2. Обзор работы Вермеера и Де Борста о неассоциированной пластичности грунтов и бетона. Часть 1. Общее содержание // Geoinfo.ru. — 2019.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — Москва: Мир, 1975. — 542 с. — URL: <https://djvu.online/file/DtUw9BqXrtZCc?ysclid=mntr5lcytc106973592> (дата обращения: 23.04.2026).
4. СП 22.13330.2016. Основания зданий и сооружений: актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83*. — Москва: Стандартинформ, 2016. — 211 с.
5. СП 24.13330.2021. Свайные фундаменты : актуализированная редакция СНиП 2.02.03-85. — Москва: Минстрой России, 2021. — 98 с.
6. СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения: актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. — Москва: Минстрой России, 2018. — 130 с.
7. Российская федерация. Законы. Технический регламент о безопасности зданий и сооружений: Федер. закон: [от 30.12.2009 № 384-ФЗ] // Собрание законодательства РФ. — 2010. — № 1. — Ст. 5.
8. Hill R. General theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids / R. Hill // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1958. — Vol. 6. — № 3. — P. 236–249.
9. Plaxis 3D Foundation Version 1.5 : Reference Manual / Plaxis bv. — Delft: Plaxis bv. — 164 p.
10. Plaxis CE V20 : Material Models Manual / Plaxis bv. — Delft: Plaxis bv. — 238 p.
11. Plaxis Version 8 : Reference Manual / Plaxis bv. — Delft : Plaxis bv. — 200 p.
12. PLAXIS 3D 2024.2 : Scientific Manual 3D / Bentley. — 77 p.
13. Smith I.M. Programming the Finite Element Method / I.M. Smith, D.V. Griffiths. — Chichester: John Wiley & Sons, 1982.
14. Vermeer P.A. A modified initial strain method for plasticity problems / P.A. Vermeer // Proceedings of the 3rd International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. — Rotterdam: Balkema, 1979. — P. 377–387.
15. Vermeer P.A. Non-associated plasticity for soils, concrete and rock / P.A. Vermeer, R.De Borst // Heron. — 1984. — Vol. 29. — № 3.
16. Zhang L. Drilled Shafts in Rock : Analysis and Design / L. Zhang. — London; Leiden; New York; Philadelphia; Singapore: A.A. Balkema Publishers (a member of Taylor & Francis Group), 2004. — 256 p.

**Список литературы на английском языке / References in English**

1. Mirny A. Yu. Matematicheskie modeli gruntov dlya inzhenerov: monografiya [Mathematical models of soils for engineers: monograph] / A.Yu. Mirny, A.S. Mosina. — Moscow: Geo Info, 2024. — 416 p. [in Russian]
2. Obzor raboty Vermeera i De Borsta o neassotsirovannoy plastichnosti gruntov i betona. Chast' 1. Obshchee sodержanie [Review of Vermeer and De Borst's work on non-associated plasticity of soils and concrete. Part 1. General content] // Geoinfo.ru. — 2019. [in Russian]
3. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [The finite element method in engineering] / O. Zenkevich. — Moscow: Mir, 1975. — 542 p. — URL: <https://djvu.online/file/DtUw9BqXrtZCc?ysclid=mntr5lcytc106973592> (accessed: 23.04.2026). [in Russian]
4. SP 22.13330.2016. Osnovaniya zdaniy i sooruzheniy : aktualizirovannaya redaktsiya SNIp 2.02.01-83* [Foundations of buildings and structures : updated edition of SNIp 2.02.01-83*]. — Moscow: Standartinform, 2016. — 211 p. [in Russian]
5. SP 24.13330.2021. Svaynye fundamenty: aktualizirovannaya redaktsiya SNIp 2.02.03-85 [Pile foundations: updated edition of SNIp 2.02.03-85]. — Moscow: Minstroy Rossii, 2021. — 98 p. [in Russian]
6. SP 63.13330.2018. Betonnye i zhelezobetonnye konstruksii. Osnovnye polozheniya: aktualizirovannaya redaktsiya SNIp 52-01-2003 [Concrete and reinforced concrete structures. General provisions : updated edition of SNIp 52-01-2003]. — Moscow: Russian Ministry of Construction, 2018. — 130 p. [in Russian]
7. Rossiiskaya federatsiya. Zakoni. Tekhnicheskiiy reglament o bezopasnosti zdaniy i sooruzheniy [Russian Federation. Laws. Technical Regulations on Safety of Buildings and Structures]: Federal Law: [No. 384-FZ of December 30, 2009] // Sobranie zakonodatel'stva RF [Collection of Legislation of the Russian Federation]. — 2010. — № 1. — Art. 5. [in Russian]
8. Hill R. General theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids / R. Hill // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 1958. — Vol. 6. — № 3. — P. 236–249.
9. Plaxis 3D Foundation Version 1.5 : Reference Manual / Plaxis bv. — Delft: Plaxis bv. — 164 p.
10. Plaxis CE V20 : Material Models Manual / Plaxis bv. — Delft: Plaxis bv. — 238 p.
11. Plaxis Version 8 : Reference Manual / Plaxis bv. — Delft : Plaxis bv. — 200 p.
12. PLAXIS 3D 2024.2 : Scientific Manual 3D / Bentley. — 77 p.
13. Smith I.M. Programming the Finite Element Method / I.M. Smith, D.V. Griffiths. — Chichester: John Wiley & Sons, 1982.
14. Vermeer P.A. A modified initial strain method for plasticity problems / P.A. Vermeer // Proceedings of the 3rd International Conference on Numerical Methods in Geomechanics. — Rotterdam: Balkema, 1979. — P. 377–387.
15. Vermeer P.A. Non-associated plasticity for soils, concrete and rock / P.A. Vermeer, R.De Borst // Heron. — 1984. — Vol. 29. — № 3.
16. Zhang L. Drilled Shafts in Rock : Analysis and Design / L. Zhang. — London; Leiden; New York; Philadelphia; Singapore: A.A. Balkema Publishers (a member of Taylor & Francis Group), 2004. — 256 p.