

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.64.3>**СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. ПОСТАНОВКА В ПРОИЗВОДНЫХ И РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Научная статья

Семенов Д.А.^{1,*}¹ ORCID : 0000-0002-9144-1412;¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (dan290797[at]gmail.com)

Аннотация

В статье описана постановка стационарной задачи теплопроводности относительно производной температуры, вектора теплового потока, и ее решение методом граничных элементов. Основное преимущество постановки — возможность явного вычисления компонент вектора теплового потока без численного дифференцирования температурного поля. Граничные интегральные уравнения получены относительно вектора теплового потока. Изложена процедура решения основных и смешанных краевых задач, составлены системы разрешающих уравнений. На примере численного решения смешанной краевой задачи теплопроводности с граничными условиями третьего рода и сопоставления результатов расчета показана достоверность предлагаемой постановки и требуемая точность полученного решения.

Ключевые слова: метод граничных элементов, уравнение Пуассона, интегральное уравнение, постановка в напряжениях, смешанная краевая задача.

STATIONARY THERMAL CONDUCTIVITY PROBLEM. FORMULATION IN DERIVATIVES AND SOLUTION BY THE FINITE ELEMENT METHOD

Research article

Semenov D.A.^{1,*}¹ ORCID : 0000-0002-9144-1412;¹ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation

* Corresponding author (dan290797[at]gmail.com)

Abstract

The article describes the formulation of a stationary thermal conductivity problem with respect to the temperature derivative, the heat flow vector, and its solution using the boundary element method. The main advantage of this formulation is the ability to explicitly calculate the components of the heat flow vector without numerically differentiating the temperature field. Boundary integral equations are obtained with respect to the heat flow vector. The procedure for solving basic and mixed boundary value problems is described, and systems of resolving equations are compiled. The reliability of the suggested formulation and the required accuracy of the obtained solution are demonstrated by the example of a numerical solution of a mixed boundary value problem of heat conductivity with third-order boundary conditions and a comparison of the calculation results.

Keywords: finite element method, Poisson's equation, integral equation, stress formulation, mixed boundary value problem.

Введение

Задача стационарного распределения температуры в твёрдом теле — одно из фундаментальных приложений уравнений Лапласа и Пуассона, изучаемое ещё со времён Фурье. До разработки численных методов её решали аналитически для областей простой геометрии; классические решения обобщены в нескольких монографиях [1], [2]. Однако в инженерной практике преобладают тела со сложной конфигурацией и неоднородными граничными условиями, где строгое решение недостижимо.

Среди численных подходов метод граничных элементов (МГЭ) занял особое место, поскольку позволяет свести расчёт к дискретизации лишь границы области, и тем самым на единицу снизить размерность задачи. В работах [3], [4], [5], [6] представлена реализация метода граничных элементов для наиболее характерных процессов, описываемых уравнением Лапласа, для задач теплопроводности. Также, применительно к уравнению Пуассона, МГЭ нашел широкое применение при решении задачи о кручении стержней [7], так как при любой геометрии сечения стержня экстремальные значения касательных напряжений локализуются именно на границе [8]. Следовательно, определение касательных напряжений на границе позволяет сделать однозначный вывод о прочности всего сечения. Помимо решения внутренних краевых задач, МГЭ крайне эффективен при решении так называемых внешних краевых задач или задач на бесконечной или полубесконечной области [9]. В классической постановке МГЭ интегральное представление формулируется относительно температуры, а тепловой поток получают последующим дифференцированием, что порождает дополнительные погрешности и приводит к ухудшению сходимости на участках с большими градиентами.

Настоящая работа предлагает альтернативную постановку — непосредственно в частных производных, где основным искомым полем является вектор плотности теплового потока. Такой подход позволяет исключить промежуточный этап численного дифференцирования и тем самым снизить накопление погрешности.

В статье выводится интегральное уравнение для вектора теплового потока, описываются алгоритмы сборки матриц МГЭ, а также приводится схема их эффективной реализации. Методика проходит верификацию на тестовой задаче с известным аналитическим решением; анализ результатов расчета подтверждает высокую точность и стабильность предложенного подхода даже при грубой дискретизации границы. Полученные результаты демонстрируют перспективность постановки относительно производных для практических расчетов теплопроводности в инженерных приложениях.

Цель работы — разработка постановки задачи стационарной теплопроводности относительно вектора теплового потока для любых типов граничных условий; получение граничных интегральных относительно теплового потока и решение методом граничных элементов.

Постановка задачи относительно вектора теплового потока

Рассмотрим плоскую область S , ограниченную контуром Γ (рис. 1). Традиционную формулировку задачи о стационарном распределении температуры $T = T(x, y)$ в области S запишем следующим образом:

$$S : \Delta T = d, \quad (1)$$

$$\Gamma_1 : T = T_1, \quad (2)$$

$$\Gamma_2 : \partial_n T = p, \quad (3)$$

где $d = d(x, y)$ — заданная функция источников тепла;

$T = T_1(\Gamma)$ — заданная на Γ_1 температура;

$p = p(\Gamma)$ — заданный на Γ_2 тепловой поток;

$\partial_n \equiv \frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к контуру Γ ;

$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ — части граничного контура Γ ;

$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ — оператор Лапласа на плоскости, здесь $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$.

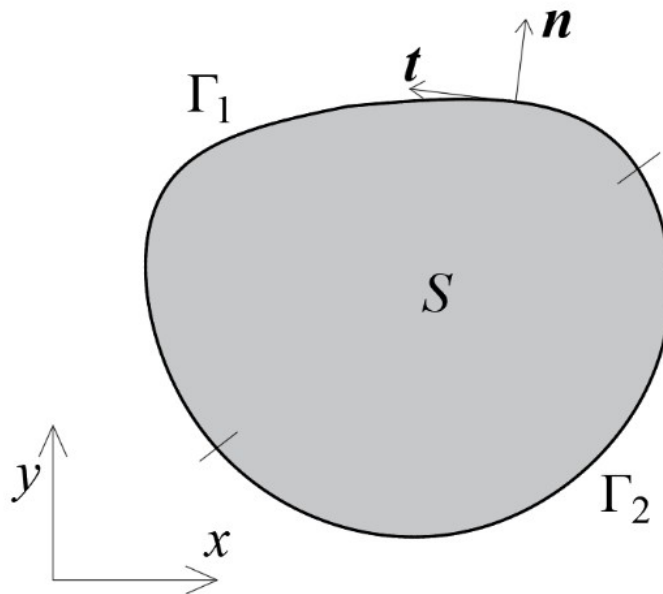


Рисунок 1 - Расчетная схема

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.64.3.1>

Сформулируем задачу, в которой неизвестными являются первые производные от решения задачи (1)-(3). Введем компоненты вектора теплового потока

$$q_x = \partial_x T \quad q_y = \partial_y T. \quad (4)$$

Тогда уравнение (1) запишется следующим образом:

$$\partial_x q_x + \partial_y q_y = d. \quad (5)$$

Функция q_x, q_y удовлетворяют уравнению

$$\partial_x q_y - \partial_y q_x = 0, \quad (6)$$

которое естественно назвать уравнением совместности.

Выполним следующие операции: продифференцируем уравнение (5) по x и вычтем уравнение (6), продифференцированное по y ; продифференцируем уравнение (5) по y и сложим с уравнением (6), продифференцированным по x .

Получим следующие два уравнения

$$\begin{aligned}\Delta q_x &= \partial_x d, \\ \Delta q_y &= \partial_y d.\end{aligned}\quad (7)$$

Сформируем граничные условия, записанные относительно неизвестных функций q_x и q_y . Так как по определению нормальной производной

$$\partial_n T = n_x \partial_x T + n_y \partial_y T = n_x q_x + n_y q_y, \quad (8)$$

где n_x и n_y — проекции вектора единичной нормали на оси координат (рис. 1), то искомым вид условия (3) следующий

$$n_x q_x + n_y q_y = p. \quad (9)$$

Для формулировки второго граничного условия продифференцируем по дуге контура Γ условие (2)

$$\partial_\Gamma T = t_x \partial_x T + t_y \partial_y T = t_x q_x + t_y q_y = h, \quad (10)$$

где t_x и t_y — проекции единичного касательного вектора к контуру Γ (рис. 1);

$h \equiv \partial_\Gamma T_l$ — известная на Γ функция.

Для обеспечения необходимого числа граничных условий, потребуем: в точках границы Γ_1 — выполнения уравнения (5), в точках границы Γ_2 — выполнения уравнения (6).

Окончательно для неизвестных функций q_x и q_y имеем следующие уравнения и граничные условия:

$$S : \begin{cases} \Delta q_x = \partial_x d \\ \Delta q_y = \partial_y d \end{cases} \quad (11)$$

$$\Gamma_1 : \begin{cases} t_x q_x + t_y q_y = h \\ \partial_x q_x + \partial_y q_y = d \end{cases} \quad (12)$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} n_x q_x + n_y q_y = p \\ \partial_x q_y - \partial_y q_x = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Система дифференциальных уравнений (11) с граничными условиями (12) и (13) и представляет предлагаемую постановку краевой задачи, неизвестными в которой являются производные от решения задачи (1)–(3). Постановку (11)–(13) будем называть постановкой (задачей) относительно производных. Решив задачу (11)–(13), можно найти производные от температуры T , не находя самой функции T . Поскольку в численных алгоритмах решения этой задачи в качестве узловых неизвестных будут выступать значения функций q_x и q_y , то, тем самым, исчезает проблема численного дифференцирования температуры для их определения.

Ниже представлена векторная запись постановки (11)–(13) с необходимыми пояснениями. Обозначим q –вектор с компонентами q_x, q_y ; ∇ — оператор-градиент на плоскости; вектор $\tilde{q}$ — повернутый на $\pi/2$ по часовой стрелке, если смотреть с оси z , вектор q ; n и t — единичные нормальный и касательный к контуру Γ векторы; точкой обозначается скалярное произведение. Постановка задачи (11)–(13) приобретает следующий вид:

$$S : \Delta q = \nabla d \quad (14)$$

$$\Gamma_1 : \begin{cases} t \cdot q = h \\ \nabla \cdot q = d \end{cases} \quad (15)$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} n \cdot q = p \\ \nabla \cdot \tilde{q} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Интегральное представление и граничные интегральные уравнения относительно вектора теплового потока

Для получения граничных интегральных уравнений относительно вектора теплового потока необходимо иметь интегральное представление на плоскости для вектора q .

Пусть a — единичный тензор на плоскости, c — базисный кососимметричный тензор на плоскости. Если e_x, e_y — орты декартовой системы координат, то введенные тензоры имеют следующие диадное представление:

$$a = e_x e_x + e_y e_y, \quad c = e_x e_y - e_y e_x.$$

Основные свойства введенных тензоров:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b, & c \cdot b &= \tilde{b} \\ \nabla \cdot a &= \nabla \cdot c \equiv 0, & a &= a^T, & c &= c^T, & c \cdot c &= -a \end{aligned}$$

где b — произвольный вектор на плоскости $b = b_x e_x + b_y e_y$;

$\tilde{\mathbf{b}}$ — повернутый на $\pi/2$ вектор $\tilde{\mathbf{b}} = b_y \mathbf{e}_x - b_x \mathbf{e}_y$.

Лапласиан от произвольного вектора φ имеет следующий вид:

$$\Delta \varphi = \nabla \cdot (a \nabla \cdot \varphi + c \nabla \cdot \tilde{\varphi}). \quad (17)$$

Умножим (17) скалярно на произвольный вектор $\mathbf{q}$, преобразуя правую часть с помощью равенства [8]:

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \cdot \mathbf{Q} = \nabla \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}) - \mathbf{Q}^T \cdot \nabla \mathbf{q}, \quad (18)$$

где $\mathbf{Q}$ — произвольный тензор второго ранга

символ « $\cdot\cdot$ » — двойное скалярное произведение двух тензоров [8];

получим:

$$\mathbf{q} \cdot \Delta \varphi = \nabla \cdot (\mathbf{q} \nabla \cdot \varphi + \tilde{\mathbf{q}} \nabla \cdot \tilde{\varphi}) - \nabla \cdot \varphi \nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot \tilde{\varphi} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{q}}. \quad (19)$$

Интегрируя (19) по области S и используя формулу Остроградского-Гаусса [11]

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{b} \, dS = \int_\Gamma \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} \, d\Gamma, \quad (20)$$

справедливую для любого вектора $\mathbf{b}$, получим:

$$\int_S \mathbf{q} \cdot \Delta \varphi \, dS = \int_\Gamma (q_n \nabla \cdot \varphi + q_t \nabla \cdot \tilde{\varphi}) \, d\Gamma - \int_S (\nabla \cdot \mathbf{q} \nabla \cdot \varphi + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{q}} \nabla \cdot \tilde{\varphi}) \, dS, \quad (21)$$

где $q_n \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{q}$, $q_t \equiv \mathbf{t} \cdot \mathbf{q}$ — проекции вектора $\mathbf{q}$ на нормаль и касательную к контуру Γ ; $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}$ — единичные векторы (рис. 1), связанные соотношениями:

$$\mathbf{n} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = -\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}. \quad (22)$$

Пусть $\mathbf{m}$, $\mathbf{z}$ — две произвольные точки на плоскости, $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{R}_z$ — их радиус-векторы (рис. 2). Введем обозначения:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z - \mathbf{R}_m, \quad R = |\mathbf{R}| = \sqrt{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}}. \quad (23)$$

Введем функцию $v(x, y)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости [10]:

$$v = \ln R. \quad (24)$$

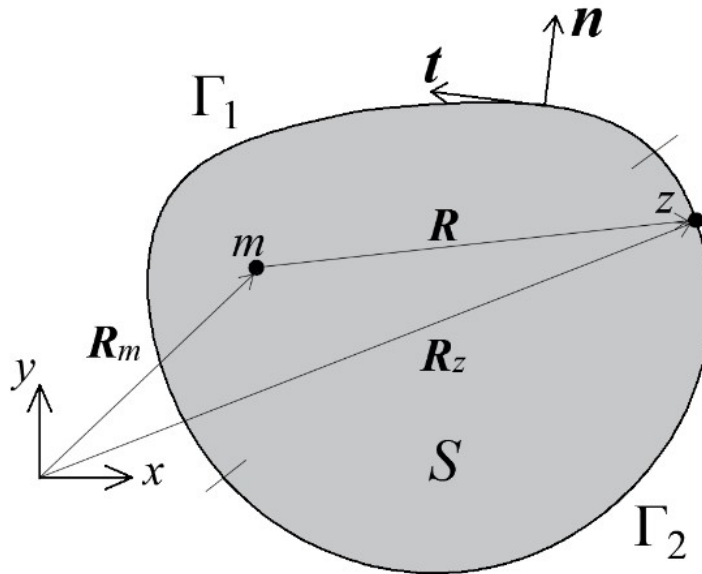


Рисунок 2 - Определение радиус-векторов
DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.64.3.2>

По определению фундаментального решения

$$\Delta_z v = 2\pi \delta(\mathbf{m}, \mathbf{z}), \quad (25)$$

Δ_z — оператор Лапласа с дифференцированием по координатам точки $\mathbf{z}$;

$\delta(\mathbf{m}, \mathbf{z})$ — дельта-функция Дирака со следующим основным свойством:

$$\int_S g(\mathbf{z}) \delta(\mathbf{m}, \mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z}) = g(\mathbf{m}) c(\mathbf{m}), \quad (26)$$

здесь $g(\mathbf{z})$ — произвольная непрерывная функция;

обозначение $dS(\mathbf{z})$ подчеркивает, что интегрирование ведется по координатам точки $\mathbf{z}$;

$$c(m) = \begin{cases} 1, & m \in S, \\ 0.5 & m \in \Gamma, \\ 0, & m \notin S + \Gamma. \end{cases} \quad (27)$$

Воспользуемся уравнениями (23)-(25) и положим в равенстве (21) $\varphi = b \cdot \ln R$, где b — произвольный постоянный вектор. Для вектора φ имеем:

$$\Delta_z \varphi = b 2\pi \delta(m, z), \quad \nabla_z \cdot \varphi = b \cdot \frac{R}{R^2}, \quad \nabla_z \cdot \tilde{\varphi} = -b \cdot \frac{\tilde{R}}{R^2}. \quad (28)$$

Подставляя в (21) и используя свойство (26), получим (отбросив произвольный вектор b):

$$\begin{aligned} 2\pi c(m)q(m) = \\ = \int_{\Gamma} \left(q_n \frac{R}{R^2} - q_t \frac{\tilde{R}}{R^2} \right) d\Gamma(z) + \int_S \left(\frac{\tilde{R}}{R^2} \nabla \cdot \tilde{q} - \frac{R}{R^2} \nabla \cdot q \right) dS(z). \end{aligned} \quad (29)$$

Равенство (29) и есть искомое интегральное представление произвольного вектора на плоскости.

Если под вектором q понимать вектор производных от температуры T : $q = q_x e_x + q_y e_y$, то для него, согласно (5), (6)

$$S : \nabla \cdot q = d, \quad \nabla \cdot \tilde{q} = 0 \quad (30)$$

уравнение (29) приобретает следующий вид

$$2\pi c(m)q(m) = \int_{\Gamma} \left(q_n \frac{R}{R^2} - q_t \frac{\tilde{R}}{R^2} \right) d\Gamma(z) - \int_S \left(\frac{R}{R^2} d \right) dS(z) \quad (31)$$

Чтобы иметь возможность вычислить q в любой точке $m \in S$ необходимо в каждой точке границы Γ знать значения нормальной и касательной составляющих q_n и q_t . В основных краевых задачах известна только одна из этих составляющих или их линейная комбинация:

$\Gamma = \Gamma_1 : \quad \partial_{\Gamma} T = q_t = h$ — I краевая задача,

$\Gamma = \Gamma_2 : \quad \partial_n T = q_n = p$ — II краевая задача.

I краевая задача.

Для нахождения функции q_n умножим (31) скалярно на вектор n_m (единичный вектор, нормальный к контуру Γ в точке m) и наложим условие $m \in \Gamma$. Получим следующее интегральное уравнение относительно функции q_n :

$$\begin{aligned} q_n(m) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left(q_n \frac{n_m \cdot R}{R^2} \right) d\Gamma(z) = \\ - \frac{1}{\pi} \left[\int_{\Gamma} \left(h \frac{n_m \cdot \tilde{R}}{R^2} \right) d\Gamma(z) + \int_S \left(d \frac{n_m \cdot R}{R^2} \right) dS(z) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Определив из этого уравнения неизвестную функцию q_n , по (31) возможно вычислить значение вектора q в любой точке $m \in S$.

II краевая задача.

Для нахождения функции q_t умножим (31) скалярно на вектор t_m (единичный вектор, касательный к контуру Γ в точке m) и наложим условие $m \in \Gamma$. Получим следующее интегральное уравнение относительно функции q_t :

$$(t_m \cdot \tilde{R} = -n_m \cdot R) :$$

$$\begin{aligned} q_t(m) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \left(q_t \frac{n_m \cdot R}{R^2} \right) d\Gamma(z) = \\ = \frac{1}{\pi} \left[\int_{\Gamma} \left(p \frac{n_m \cdot \tilde{R}}{R^2} \right) d\Gamma(z) + \int_S \left(d \frac{n_m \cdot R}{R^2} \right) dS(z) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Уравнение (33) относительно неизвестной функции — граничное интегральное уравнение для II краевой задачи.

Любое из уравнений, (32) или (33) может быть использовано при решении *смешанной краевой задачи*, где неизвестными являются и нормальная и касательная компоненты вектора теплового потока q .

III краевая задача.

В задачах теплопроводности широкое применение также находят граничные условия 3 рода (условие Робина). Если тепловой поток через поверхность линейно пропорционален разности температур между поверхностью и окружающей ее средой, то такое граничное условие принято называть линейная теплопередача в среду с температурой T_0 . Условие Робина представляет собой линейную комбинацию температуры и ее производной по нормали:

$$eT + f q_n = k, \quad (34)$$

где k, e, f — функции положения точки. Условие (34) включает в себя упоминаемые ранее условия, поскольку при $f = 0$ получаем условие Дирихле, при $e = 0$ имеем условие Неймана.

Для решения третьей краевой задачи воспользуемся классическим граничным интегральным уравнением относительно функции температур T [10]:

$$\frac{1}{2}T(m) - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} T(z) \partial_n v d\Gamma(z) = - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} q_n(z) v d\Gamma(z), \quad (35)$$

где $v = \ln R$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости;

$$\partial_n v = \frac{n_z \cdot R}{R^2}. \quad (36)$$

Используя уравнение (34) заменим функцию температур T на функцию q_n уравнении (35):

$$\frac{1}{2e} (k - f q_n(m)) - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi e} (k - f q_n(z)) \partial_n v d\Gamma(z) = - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} q_n(z) v d\Gamma(z). \quad (37)$$

Решив полученное уравнение и найдя функцию q_n на границе Γ , функцию q_t можно определить с помощью уравнения второй краевой задачи (33).

Интегральные уравнения (32), (33) отличаются только правой частью. Оба уравнения — уравнения второго рода, следовательно, решение второй краевой задачи аналогично по сложности решению первой краевой задачи.

Численное решение уравнений (32), (33) может быть выполнено методом граничных элементов (МГЭ), который применяется при решении обычных граничных интегральных уравнений в постановке относительно функции температур T . При этом уравнения (32), (33) и интегральное представление (31) обеспечивают возможность определения теплового потока q как на границе, так и внутри области без численного дифференцирования функции температур T .

Метод граничных элементов

Рассмотрим наиболее полную задачу, в которой имеются все три упомянутые выше граничные условия: Дирихле, Неймана, а также их линейная комбинация — условие Робина.

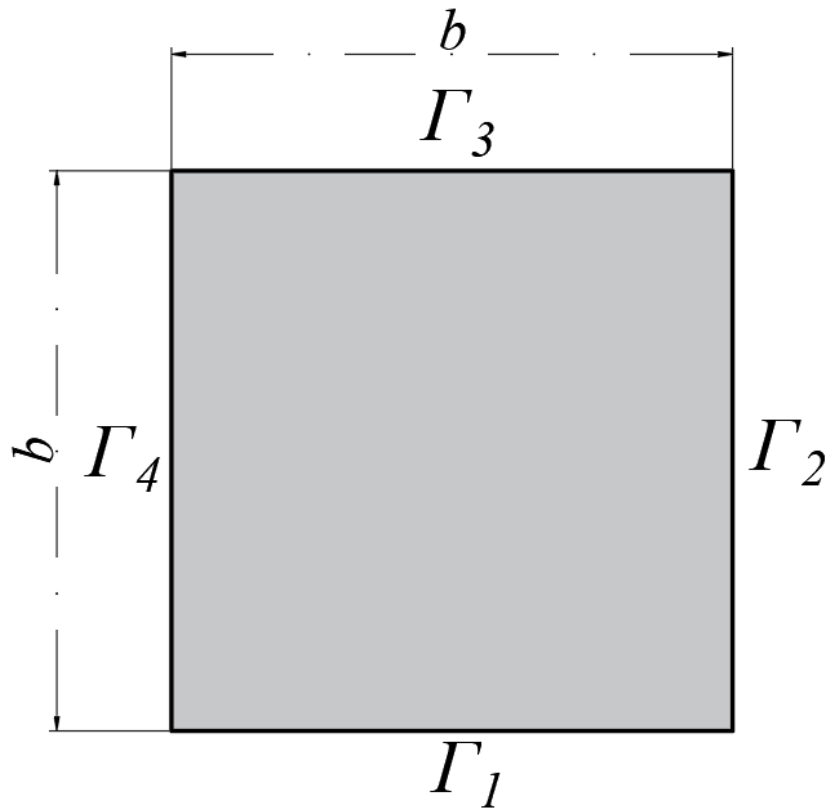


Рисунок 3 - Расчетная схема смешанной краевой задачи
DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.64.3.3>

Условия задачи согласно рисунку 3 следующие:

$$\Gamma_1 : T = 100$$

$$\Gamma_2 : T + q_n = 0$$

$$\Gamma_3 : q_n = 0$$

$$\Gamma_4 : q_n = 0$$

$$b = 5$$

Поскольку в данном примере на границе Γ задано граничное условие III рода, такую задачу следует решать в два шага. На первом шаге необходимо численно решить уравнение (37) и определить функцию q_n на всей границе Γ . На втором — используя уравнение (33), численно определить функцию q_i на границе Γ .

Запишем дискретную форму интегрального уравнения (35), с использованием так называемых «постоянных» граничных элементов. Узлы, в которых рассчитываются значения неизвестной функции расположены в середине каждого элемента. Значение искомой функции в пределах одного граничного элемента принимается постоянной величиной. Для упрощения записи разобьем границу на 4 элемента (размер граничного элемента $l = b$) и преобразуем уравнение (35) к виду:

$$T_i - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 T_j \int_{\Gamma_j} \frac{n_j \cdot R_{ij}}{R^2} d\Gamma(j) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 q_{n,j} \int_{\Gamma_j} \ln R d\Gamma(j) \quad (38)$$

Введем обозначения

$$H_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{n_j \cdot R_{ij}}{R^2} d\Gamma(j) \quad (39)$$

$$G_{ij} = -\frac{1}{\pi} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_j} \ln R d\Gamma(j) + \delta_{ij} l \left(\ln \frac{l}{2} - 1 \right) \right)}_{i \neq j} \quad (40)$$

где δ_{ij} — дельта Кронекера;

l — длина граничного элемента

и представим уравнение (38) в матричном виде

$$HT = GQ, \quad (41)$$

где

$$T + FQ = K, \quad (42)$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 e_1 & f_2 e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 e_3 & f_4 e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 e_1 \\ k_2 e_2 \\ k_3 e_3 \\ k_4 e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Подставив формулу (42) в уравнение (41), получим

$$H(K - FQ) = GQ. \quad (45)$$

Система уравнений относительно Q примет следующий вид

$$(G + HF)Q = HK. \quad (46)$$

Используя уравнение (46), можно определить функцию на всей границе Γ .

Выполним аналогичные операции для граничного интегрального уравнения второй краевой задачи. Дискретная форма уравнения (33) примет следующий вид

$$q_{t,i} - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 q_{t,j} \int_{\Gamma_j} \frac{n_i \cdot R_{ij}}{R^2} d\Gamma(j) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^4 q_{n,j} \int_{\Gamma_j} \frac{\widetilde{n_i \cdot R_{ij}}}{R^2} d\Gamma(j), \quad (47)$$

или в матричном виде

$$NZ = PQ, \quad (48)$$

где z — столбец узловых значений касательной компоненты вектора теплового потока q_t на границе Γ ;

$$N_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{n_i \cdot R_{ij}}{R^2} d\Gamma(j); \quad (49)$$

$$P_{ij} = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{\widetilde{n_i \cdot R_{ij}}}{R^2} d\Gamma(j) \quad (50)$$

Представленное решение описывает наиболее общую постановку решения смешанной краевой задачи, в которой также имеются граничные условия третьего рода.

Результаты и обсуждение

Для верификации методики выполним расчет описанной выше задачи. Рассмотрим распределение компонент вектора теплового потока по границам Γ_{1-4} . Аналитическое решение исследуемой задачи имеет следующий вид [1], [2]

$$T(x, y) = 200 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(a_n x) \cdot \text{ch}[a_n(b-y)]}{[(a_n^2 + 1)b + 1] \cos(a_n x) \cdot \text{ch}(a_n b)}, \quad (51)$$

где a_n — положительные корни уравнения $a_n \text{tg}(a_n b) = 1$.

Расчеты выполнены с последовательным двукратным уменьшением размера граничного элемента (1, 0.5, 0.25). Размеры граничных элементов приняты одинаковыми по всему контуру Γ . На рисунке 4 представлены результаты расчета.

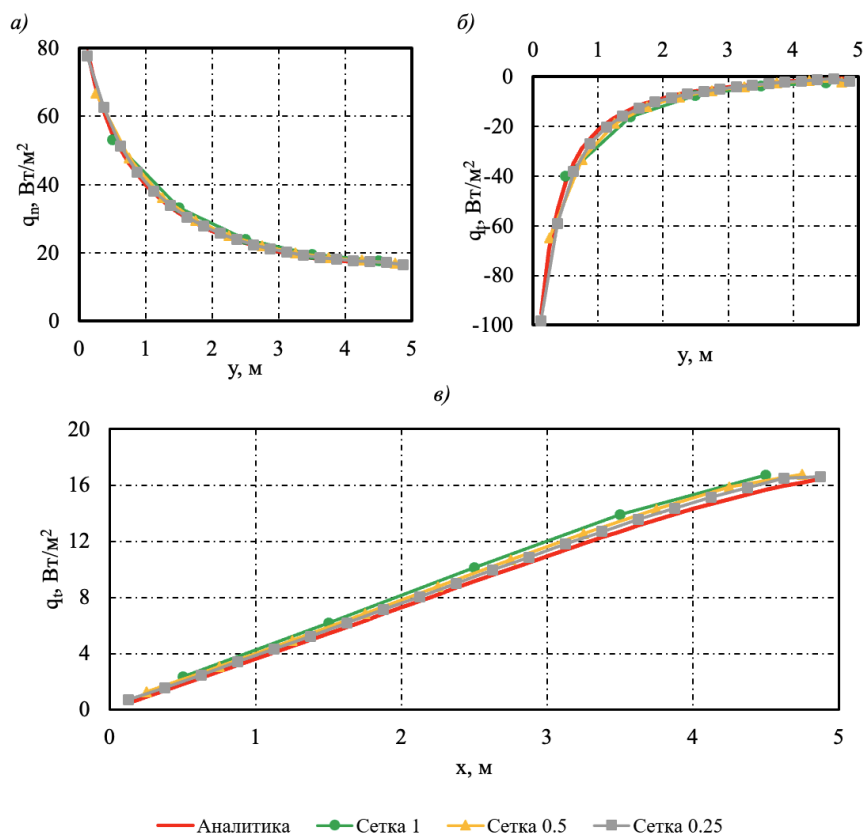


Рисунок 4 - Результаты расчета тестовой задачи
 DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.64.3.4>

Примечание: а – q_n на границе Γ_2 ; б – q_t на границе Γ_2 ; в – q_t на границе Γ_3

Заключение

В работе представлена постановка задачи стационарной теплопроводности относительно вектора теплового потока, получены граничные интегральные уравнения для основных, в том числе смешанных краевых задач. На примере решения смешанной задачи с граничными условиями третьего рода описан алгоритм решения методом граничных элементов, проведена верификация с известным аналитическим решением. Полученные результаты демонстрируют возможность решения основных краевых задач, которые представляют собой уравнения Лапласа или Пуассона, относительно производной исходной функции.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Карлсоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карлсоу, Д. Егер. — Москва : Наука, 1964. — 489 с.
2. Лебедев Н.Н. Сборник задач по математической физике / Н.Н. Лебедев, И.П. Скальская, Я.С. Уфлянд. — Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. — 421 с.
3. Низомов Д.Н. Метод граничных уравнений в решении задач строительной механики, сводящихся к уравнению Лапласа / Д.Н. Низомов, А.А. Ходжибоев, О.А. Ходжибоев // Вестник ТТУ. — 2015. — № 2. — С. 24–28.
4. Onishi K. Boundary element approximate method for transient heat conduction / K. Onishi, T. Kuroki // Theoretical and applied mechanics. — 1981. — Vol. 30. — P. 423–428.
5. Rana S.K. A BEM formulation of two dimensional steady state heat conduction in exchanger tubes of arbitrary cross sections / S.K. Rana, A. Jena // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2017. — Vol. 106. — P. 195–211.

6. Dumont N.A. Complex-variable, high-precision formulation of the consistent boundary element method for 2D potential and elasticity problems / N.A. Dumont // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2023. — Vol. 152. — P. 552–574.
7. Chen K.H. A new error estimation technique for solving torsion bar problem with inclusion by using BEM / K.H. Chen, J.H. Kao, J.H. Chen // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2020. — Vol. 115. — P. 168–211.
8. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. — Москва : Наука, 1970. — 940 с.
9. Telles J.F.C. Boundary element solution for half-plane problems / J.F.C. Telles, C.A. Brebbia // *International Journal of Solids and Structures*. — 1981. — Vol. 17. — P. 1149–1158.
10. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. — Москва : Мир, 1987. — 524 с.
11. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики : учебное пособие / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — 6-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство МГУ, 1999. — 799 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Karlsou G. Teploprovodnost' tverdykh tel [Thermal conductivity of solids] / G. Karlsou, D. Eger. — Moscow : Nauka, 1964. — 489 p. [in Russian]
2. Lebedev N.N. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike [Collection of problems in mathematical physics] / N.N. Lebedev, I.P. Skalskaya Ya.S. Uflyand. — Moscow : State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1955. — 421 p. [in Russian]
3. Nizomov D.N. Metod granichnykh uravnenij v reshenii zadach stroitel'noj mekhaniki, svodyashchikhsya k uravneniyu Laplasya [The method of boundary equations in solving problems of structural mechanics reduced to the Laplace equation] / D.N. Nizomov, A.A. Khodzhiboev, O.A. Khodzhiboev // *Vestnik TTU* [Bulletin of TTU]. — 2015. — № 2. — P. 24–28. [in Russian]
4. Onishi K. Boundary element approximate method for transient heat conduction / K. Onishi, T. Kuroki // *Theoretical and applied mechanics*. — 1981. — Vol. 30. — P. 423–428.
5. Rana S.K. A BEM formulation of two dimensional steady state heat conduction in exchanger tubes of arbitrary cross sections / S.K. Rana, A. Jena // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. — 2017. — Vol. 106. — P. 195–211.
6. Dumont N.A. Complex-variable, high-precision formulation of the consistent boundary element method for 2D potential and elasticity problems / N.A. Dumont // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2023. — Vol. 152. — P. 552–574.
7. Chen K.H. A new error estimation technique for solving torsion bar problem with inclusion by using BEM / K.H. Chen, J.H. Kao, J.H. Chen // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2020. — Vol. 115. — P. 168–211.
8. Lurie A.I. Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity] / A.I. Lurie. — Moscow : Nauka, 1970. — 940 p. [in Russian]
9. Telles J.F.C. Boundary element solution for half-plane problems / J.F.C. Telles, C.A. Brebbia // *International Journal of Solids and Structures*. — 1981. — Vol. 17. — P. 1149–1158.
10. Brebbia C. Metody granichnykh elementov [Boundary Element Methods] / C. Brebbia, J. Telles, L. Wrobel. — Moscow : Mir, 1987. — 524 p. [in Russian]
11. Tikhonov A.N. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics] : textbook / A.N. Tikhonov, A.A. Samarsky. — 6th edition, corrected and supplemented. — Moscow : Moscow State University Publishing House, 1999. — 799 p. [in Russian]