

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.65.1>**ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ К РАСЧЕТУ ОБОРУДОВАНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВИБРОИЗОЛЯЦИЕЙ**

Научная статья

Панов М.А.^{1,*}, Парамонов Е.Е.²^{1,2} Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация

* Корреспондирующий автор (pnvmx[at]mail.ru)

Аннотация

Целью проведенного исследования является развитие метода расчета динамических систем, основанного на построении передаточных и импульсных переходных функций, позволяющего записать нелинейные дифференциальные уравнения движения в виде систем нелинейных интегральных уравнений второго рода, определяющих полное решение исходной системы. В результате получены расчетные зависимости, позволяющие производить оценку эффективности нелинейной виброизоляции, в частности с включающимися дополнительными связями, для различных типов оборудования с вращающимися частями. Произведен расчет и показана эффективность применения нелинейной виброизоляции для снижения колебаний в переходных режимах на примере системы с тремя степенями свободы.

Ключевые слова: импульсная переходная функция, передаточная функция, нелинейная виброизоляция, переходные режимы.

APPLICATION OF TRANSFER FUNCTIONS TO THE CALCULATION OF EQUIPMENT WITH NON-LINEAR VIBRATION ISOLATION

Research article

Panov M.A.^{1,*}, Paramonov Y.Y.²^{1,2} National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation

* Corresponding author (pnvmx[at]mail.ru)

Abstract

The aim of the study is to develop a method for calculating dynamic systems based on the construction of transfer and impulse response functions, allowing nonlinear differential equations of motion to be written as systems of nonlinear integral equations of the second order, which determine the complete solution of the initial system. As a result, calculated dependencies were obtained that enable the assessment of the effectiveness of nonlinear vibration isolation, in particular with additional connections, for various types of equipment with rotating parts. The effectiveness of using nonlinear vibration isolation to reduce vibrations in transient modes was calculated and demonstrated using the example of a system with three degrees of freedom.

Keywords: impulse transfer function, transfer function, nonlinear vibration isolation, transient regimes.

Введение

Во время работы виброактивного оборудования могут возникать существенные колебания как самого оборудования, так и поддерживающих конструкций. При снижении пиковых перемещений оборудования, в частности, при проходе через резонанс, значительно снижается вероятность нарушения целостности всех систем оборудования, включая дополнительное оборудование, а также снижается передача колебаний на близстоящие конструкции, которые могут влиять на прочность и деформативность конструкций, вызывая, в частности, появление и развитие трещин. Для снижения негативного влияния колебаний применяют виброизоляцию, в том числе нелинейную.

В современных производственных процессах, где может происходить многократное включение-выключение оборудования в короткие промежутки времени, учет переходных режимов крайне важен. Однако традиционные методы анализа динамических систем, например метод «нормальных форм», не позволяют исследовать системы в переходных режимах, в которых максимальные амплитуды колебаний могут превышать уровни колебаний в эксплуатационных режимах в 3–5 раз [1].

Методология

В статье на примере оборудования с вращающимися частями, а именно вентилятора, показан алгоритм расчета виброизолированной системы с тремя степенями свободы в переходных режимах. Алгоритм расчета основан на применении передаточных функций (ПФ) и импульсных переходных функций (ИПФ) [1], [2], с помощью которого записываются, а затем строятся с помощью шагового метода по времени решения в виде сумм интегралов Дюамеля — относительно внешней и фиктивной (учитывающей нелинейные характеристики элементов систем виброзащиты) нагрузок [3].

Дифференциальные уравнения движения системы при нелинейной зависимости «реакция-перемещение» представляются в виде:

$$\begin{cases} m_o \ddot{s}_z + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) c_1 (s_z) s_z + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) c_2 (\vartheta_y) \vartheta_y = q_z(t); \\ m_o p_y^2 \ddot{\vartheta}_y + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) c_3 (s_z) s_z + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) c_4 (\vartheta_y) \vartheta_y - \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) c_5 (s_x) s_x = M_y(t); \\ m_o \ddot{s}_x - \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) c_6 (\vartheta_y) \vartheta_y + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) c_7 (s_x) s_x = q_x(t). \end{cases} \quad (1)$$

где s_z , s_x , ϑ_y — вертикальное и горизонтальное перемещения центра масс, угол поворота относительно оси oy (см. рис. 1), $q_z(t)$, $q_x(t)$, $M_y(t)$ — равнодействующие внешних вертикальных и горизонтальных динамических воздействий, момент внешних сил относительно оси oy .

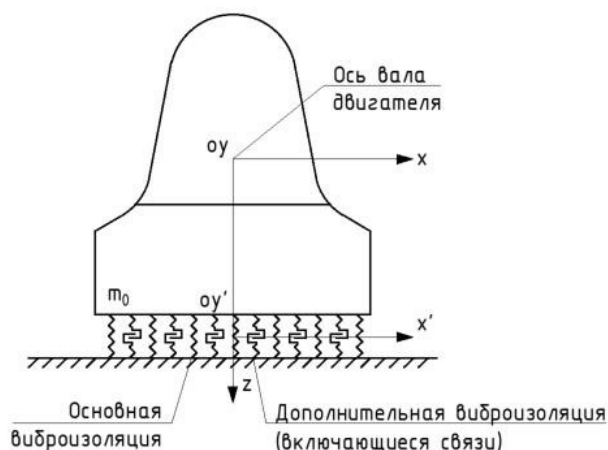


Рисунок 1 - Расчетная схема виброизолированного оборудования с включающимися связями

DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.65.1.1>

В работе рассматривается система с нелинейной виброизоляцией, характеристика которой (на примере вертикальных перемещений) показана на рис. 2. В общем случае характеристика «реакция-перемещение» может быть любой, например, кубической, экспоненциальной, степенной и т. д. Представленная на рис. 2 нелинейная зависимость реакций и перемещений может применяться при проектировании систем виброизоляции оборудования, в частности, как систем с включающимися при достижении заданных перемещений связями, тем самым определяя алгоритм расчета.

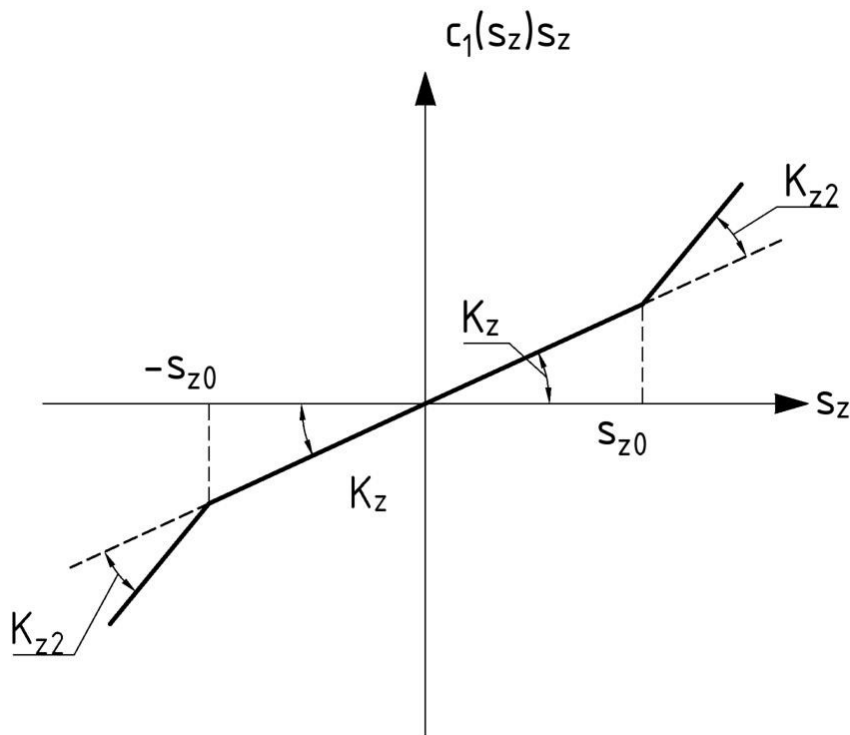


Рисунок 2 - Нелинейная зависимость реакций в упругих элементах $c_1(s_z)s_z$ от перемещений s_z
DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.65.1.2>

Для принятого типа нелинейности зависимость «реакция-перемещение»:

$$\begin{aligned} c_1(s_z)s_z &= K_z s_z \text{ при } |s_z| \leq s_{z0}; \\ c_1(s_z)s_z &= K_z s_{z0} + (K_z + K_{z2})(s_z - s_{z0}) \text{ при } |s_z| > s_{z0}. \end{aligned} \quad (2)$$

По аналогии с (2) можно записать $c_2(\vartheta_y)\vartheta_y$, $c_3(s_z)s_z$, $c_4(s_z)s_z$, $c_5(s_x)s_x$, $c_6(\vartheta_y)\vartheta_y$, $c_7(s_x)s_x$.

При построении алгоритма уравнения движения системы следует преобразовать, записав нелинейные составляющие в правой части:

$$\begin{cases} m_o \ddot{s}_z + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_z s_z + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_{zx} \vartheta_y = q_z(t) + \Phi_1(s_z) + \Phi_2(\vartheta_y) \\ m_o p_y^2 \ddot{\vartheta}_y + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_{zx} s_z + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_{\vartheta} \vartheta_y - \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_{xz} s_x = \\ = M_y(t) + \Phi_3(s_z) + \Phi_4(\vartheta_y) - \Phi_5(s_x) \\ m_o \ddot{s}_x - \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_{xz} \vartheta_y + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_x s_x = q_x(t) - \Phi_6(\vartheta_y) + \Phi_7(s_x) \end{cases} \quad (3)$$

где для дальнейшего сокращения записей обозначено:

$$\Phi_1(s_z) = \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) [K_z - c_1(s_z)] s_z \quad (4)$$

По аналогии с (4) можно записать $\Phi_2(\vartheta_y)$, $\Phi_3(s_z)$, $\Phi_4(s_z)$, $\Phi_5(s_x)$, $\Phi_6(\vartheta_y)$, $\Phi_7(s_x)$.

Без учета диссипативных сил выражения (4) запишутся так:

$$\begin{aligned} \Phi_1(s_z) &= [K_z - c_1(s_z)] s_z = -K_{z2}(s_z - s_{z0}); \quad \Phi_2(\vartheta_y) = [K_{zx} - c_2(\vartheta_y)] \vartheta_y = -K_{zx2}(\vartheta_y - \vartheta_{y0}); \\ \Phi_3(s_z) &= [K_{zx} - c_3(s_z)] s_z = -K_{zx2}(s_z - s_{z0}); \quad \Phi_4(\vartheta_y) = [K_{\vartheta} - c_4(\vartheta_y)] \vartheta_y = -K_{\vartheta2}(\vartheta_y - \vartheta_{y0}); \\ \Phi_5(s_x) &= [K_{xz} - c_5(s_x)] s_x = -K_{xz2}(s_x - s_{x0}); \quad \Phi_6(\vartheta_y) = [K_{xz} - c_6(\vartheta_y)] \vartheta_y = -K_{xz2}(\vartheta_y - \vartheta_{y0}); \\ \Phi_7(s_x) &= [K_x - c_7(s_x)] s_x = -K_{x2}(s_x - s_{x0}) \end{aligned} \quad (5)$$

При расчете виброизолированных установок коэффициенты жесткости системы определяются, в зависимости от направления колебаний, по формулам [4]:

$$\begin{aligned} K_z &= \sum_{i=1}^n k_{zi}; \quad K_x = \sum_{i=1}^n k_{xi}; \quad K_{zx} = \sum_{i=1}^n k_{zi} \cdot x_i; \quad K_{xz} = \sum_{i=1}^n k_{xi} \cdot z_i; \\ K_{\vartheta} &= \sum_{i=1}^n [k_{zi} \cdot x_i^2 + k_{xi} \cdot z_i^2] \end{aligned} \quad (6)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ — число виброизоляторов;

K_z, K_x, K_θ — обобщённые коэффициенты жесткости основания (виброизоляторов) при вертикальном и горизонтальном смещении, при повороте относительно оси объекта соответственно;

K_{zi}, K_{xi} — жесткости i -го упругого элемента соответственно по направлениям z, x ;

x_i, z_i — координаты центра тяжести i -го упругого элемента в системе координат z, x .

При проектировании нелинейной виброизоляции под виброактивное оборудование с вращающимися частями отмечается особенность, связанная с тем, что при вертикальном смещении оборудования жесткость основной виброизоляции K_z и жесткость дополнительных включающихся связей K_{z2} суммируются ($K_z + K_{z2}$) в момент достижения оборудованием перемещений $|s_z|$ больших, чем s_{z0} , одновременно с этим жесткости основной виброизоляции при горизонтальном смещении и повороте относительно оси суммируются с жесткостями дополнительных включающихся связей по этим же направлениям ($K_{zx} + K_{zx2}$; $K_\theta + K_{\theta2}$; $K_{xz} + K_{xz2}$; $K_x + K_{x2}$).

Таким образом, нелинейная виброизоляция влияет на уровень колебаний не только по вертикальному направлению, но и по горизонтальному направлению, при повороте вокруг оси.

Для решения системы уравнений (3) применим метод основанный на построении передаточных и импульсных переходных функций [1], [2]. Передаточные и импульсные переходные функции этой системы (3), по существу, и являются решением системы нелинейных дифференциальных уравнений. Значение этих функций вычисляют из расчета линейной («порождающей») системы уравнений.

Решения нелинейной системы (3) можно записать в виде нелинейных интегральных уравнений второго рода. Общее решение системы будет определяться интегралами:

$$\begin{aligned} s_z(t) &= s_{z,\text{лин.}}(t) + s_{z,\text{нелин.}}(t); \\ \vartheta_y(t) &= \vartheta_{y,\text{лин.}}(t) + \vartheta_{y,\text{нелин.}}(t); \\ s_x(t) &= s_{x,\text{лин.}}(t) + s_{x,\text{нелин.}}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Основная часть

Построим передаточные и импульсные переходные функции для линейной («порождающей») системы:

$$\begin{cases} m_o \ddot{s}_z + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_z s_z + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_{zx} \vartheta_y = q_z(t); \\ m_o p_y^2 \ddot{\vartheta}_y + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_{zx} s_z + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_\theta \vartheta_y - \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_{xz} s_x = M_y(t); \\ m_o \ddot{s}_x - \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_{xz} \vartheta_y + \left(1 + 2v \frac{d}{dt}\right) K_x s_x = q_x(t). \end{cases} \quad (8)$$

Следуя общей схеме вычисления передаточных функций линейной системы [1], подставим в (8):

$$\begin{aligned} q_z(t) &= q_1(t) = Q_1 e^{i\omega t}; M_y(t) = q_2(t) l_1 = Q_2 l_1 e^{i\omega t}; q_x(t) = q_3(t) = Q_3 e^{i\omega t}; \\ s_z &= S_z e^{i\omega t}; \dot{s}_z = i\omega S_z e^{i\omega t}; (\ddot{s}_z) = -\omega^2 S_z e^{i\omega t}; \\ \vartheta_y &= \Theta_y e^{i\omega t}; \dot{\vartheta}_y = i\omega \Theta_y e^{i\omega t}; (\ddot{\vartheta}_y) = -\omega^2 \Theta_y e^{i\omega t}; \\ s_x &= S_x e^{i\omega t}; \dot{s}_x = i\omega S_x e^{i\omega t}; (\ddot{s}_x) = -\omega^2 S_x e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Сократим на $e^{i\omega t}$ и запишем:

$$\begin{aligned} [(1 + i\omega 2v)K_z - m_o \omega^2] S_z + (1 + i\omega 2v) K_{zx} \Theta_y &= Q_1; \\ (1 + i\omega 2v) K_{zx} S_z + [(1 + i\omega 2v) K_\theta - m_o p_y^2 \omega^2 \Theta_y - (1 + i\omega 2v) K_{xz} S_x] &= Q_2 l_1; \\ -(1 + i\omega 2v) K_{xz} \Theta_y + [(1 + i\omega 2v) K_x - m_o \omega^2] S_x &= Q_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя известные зависимости [1], решения подобных систем могут быть представлены в виде разложения по формам собственных колебаний при том, что каждая составляющая полного решения определяется из решения систем уравнений, диссипативные силы в которых можно учесть, добавив в каждое из них дополнительное слагаемое пропорциональное скорости колебаний.

В частности, используется модифицированная модель Фойгта с основным параметром — коэффициентом неупругого сопротивления. Такая модель принята во многих нормативных документах, где приводятся также значения этого параметра для различных материалов и сред.

Решая систему уравнений (10) методом Крамера получим:

$$S_z = \frac{\Delta_{S_z}}{\Delta}, \quad \Theta_y = \frac{\Delta_{\Theta_y}}{\Delta}; \quad S_x = \frac{\Delta_{S_x}}{\Delta} \quad (11)$$

де $\Delta_{S_z}, \Delta_{\Theta_y}, \Delta_{S_x}$ — определитель системы, в котором i столбец заменен на вектор нагрузки, Δ — определитель системы (10):

$$\begin{aligned} \Delta &= m_o^2 p_y^2 \omega^4 (K_z + K_x) + m_o \omega^2 (K_{xz}^2 + K_{zx}^2 - K_x K_\theta - K_z K_\theta) - \\ &\quad - K_x K_{zx}^2 - K_z K_{xz}^2 + K_x K_\theta K_z - m_o^3 p_y^2 \omega^6 + \\ &\quad + K_\theta m_o^2 \omega^4 - K_x K_z m_o p_y^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения частот собственных колебаний получим, приравняв Δ (12) нулю и положив $\omega = p$. После преобразований представим в виде:

$$\begin{aligned} N(p) = & -p^6 + p^4(p_{0z}^2 + p_{0x}^2 + p_{0\theta}^2) + \\ & + p^2(p_{0xz}^4 + p_{0zx}^4 - p_{0x}^2 p_{0\theta}^2 - p_{0z}^2 p_{0\theta}^2 - p_{0x}^2 p_{0z}^2) - \\ & - (p_{0x}^2 p_{0zx}^4 + p_{0z}^2 p_{0xz}^4 - p_{0x}^2 p_{0\theta}^2 p_{0z}^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} p_{0\theta}^2 &= \frac{K_{\theta}}{m_o p_y^2}; \quad p_{0z}^2 = \frac{K_z}{m_o}; \\ p_{0x}^2 &= \frac{K_x}{m_o}; \quad p_{0zx}^4 = \frac{K_z x^2}{m_o^2 p_y^2}; \quad p_{0xz}^4 = \frac{K_x z^2}{m_o^2 p_y^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Определив значения корней частотного кубического уравнения (13) — p_1^2 , p_2^2 , p_3^2 (значения собственных частот), знаменатель Δ (определитель) в (11) следует переписать в виде:

$$\Delta(\omega) = m_o^3 p_y^2 (\omega^2 - p_1^2)(\omega^2 - p_2^2)(\omega^2 - p_3^2), \quad (15)$$

а функции (11) представить в виде сумм простых дробей, предварительно вычислив производную по ω^2 :

$$\frac{d\Delta(\omega)}{d\omega^2} = m_o^3 p_y^2 [(\omega^2 - p_2^2)(\omega^2 - p_1^2) + (\omega^2 - p_3^2)(\omega^2 - p_1^2) + (\omega^2 - p_3^2)(\omega^2 - p_2^2)] \quad (16)$$

Следуя общей схеме вычисления передаточных функций линейной системы описанной в [1], запишем ПФ системы при действии силы $Q_1 e^{i\omega t}$, $Q_2 e^{i\omega t}$, $Q_3 e^{i\omega t}$. При учете диссипативных сил по гипотезе Фойгта в знаменатель в формулах передаточных функций следует добавить слагаемые $i2\nu_s \omega p_s^2$, а для модифицированной гипотезы Фойгта $i\gamma p_s^2$:

$$\begin{aligned} H_z(\omega) &= \frac{1}{B} \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_1(p_s) \cdot R(s)}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma p_s^2}; \\ H_{\theta}(\omega) &= \frac{1}{B} \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_2(p_s) \cdot R(s)}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma p_s^2}; \\ H_x(\omega) &= \frac{1}{B} \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_3(p_s) \cdot R(s)}{p_s^2 - \omega^2 + i\gamma p_s^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$B = m_o^3 p_y^2 (p_3^2 - p_2^2)(p_3^2 - p_1^2)(p_2^2 - p_1^2); \quad (18)$$

$$R(s) = p_{1+Rem(s+1,3)}^2 - p_{1+Rem(s,3)}^2; \quad (19)$$

$$Rem(s, 3) - \text{остаток от деления номера собственной формы } s \text{ на } 3 \quad (20)$$

по ист [5].

$$L_1(p_s) = (-K_{xz}^2 + K_{\theta} K_x + m_o^2 p_y^2 \omega^4 - K_{\theta} m_o \omega^2 - K_x m_o p_y^2 \omega^2) + (K_{zx} K_x - K_{zx} m_o \omega^2) l_1 - (K_{zx} K_{xz}); \quad (21)$$

$$L_2(p_s) = (K_{zx} K_x - K_{zx} m_o \omega^2) + (K_z K_x + m_o^2 \omega^4 - K_z m_o \omega^2 - K_x m_o \omega^2) l_1 + (-K_z K_{xz} + K_{xz} m_o \omega^2); \quad (22)$$

$$L_3(p_s) = -(K_{zx} K_{xz}) + (-K_z K_{xz} + K_{xz} m_o \omega^2) l_1 + (K_z K_{\theta} - K_{zx}^2 + m_o^2 p_y^2 \omega^4 - K_{\theta} m_o \omega^2 - K_z m_o p_y^2 \omega^2); \quad (23)$$

H_z , H_{θ} и H_x — передаточные функции системы — соответственно амплитуды вертикального перемещения, угла поворота и горизонтального перемещения центра масс, записанные с учетом затухания.

Для машин с вращающимися частями, как при построении суммарных решений при гармонических воздействиях с помощью передаточных или при произвольных, используя переходные функции, перемещение от вертикальной и горизонтальной нагрузок определяются со сдвигом по фазе на $\pi/2$ [1]:

$$\begin{aligned} q_z(t) &= Q_1 \sin \omega t; \\ q_x(t) &= Q_3 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = Q_3 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом диссипативных членов могут быть записаны решения линейной системы (8) при гармонических воздействиях, в частности при $q_z(t) = Q_1 \sin \omega t$; $M_x(t) = Q_2 l_1 \sin \omega t$; $q_x(t) = Q_3 \cos \omega t$ следует:

$$s_z(t) = Q_1 \operatorname{Re} \left[\overline{H_z} \cdot e^{i\omega t} \right] = \frac{Q_1}{B} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_1(p_s) \cdot R(s)}{p_s^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{p_s^2} + i\gamma \right)} \cdot e^{i\omega t} \right\} = \frac{Q_1}{B} \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_1(p_s) \cdot R(s)}{p_s^2 A_s} \cdot \sin(\omega t - \varphi_s) \quad (25)$$

$$\vartheta_y(t) = Q_2 \operatorname{Re} \left[\overline{(H_y)} \cdot e^{i\omega t} \right] = \frac{Q_2}{B} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_2(p_s) \cdot R(s)}{p_s^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{p_s^2} + i\gamma \right)} \cdot e^{i\omega t} \right\} = \frac{Q_2}{B} \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_2(p_s) \cdot R(s)}{p_s^2 A_s} \cdot \sin(\omega t - \varphi_s) \quad (26)$$

$$s_x(t) = Q_3 \operatorname{Re} \left[\overline{(H_x)} \cdot e^{i\omega t} \right] = \frac{Q_3}{B} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_3(p_s) \cdot R(s)}{p_s^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{p_s^2} + i\gamma \right)} \cdot e^{i\omega t} \right\} = \frac{Q_3}{B} \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_3(p_s) \cdot R(s)}{p_s^2 A_s} \cdot \cos(\omega t - \varphi_s) \quad (27)$$

где

$$A_s = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_s^2} \right)^2 + \gamma^2} \quad (28)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{\gamma}{1 - \frac{\omega^2}{p_s^2}} \quad (29)$$

Используя известные зависимости [1] можем записать импульсные переходные функции:

$$k_{uz} = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_1(p_s) \cdot R(s)}{p_s^*} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2} p_s t} \cdot \sin p_s^* t \quad (30)$$

$$k_{u\vartheta} = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_2(p_s) \cdot R(s)}{p_s^*} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2} p_s t} \cdot \sin p_s^* t \quad (31)$$

$$k_{ux} = \frac{1}{B} \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_3(p_s) \cdot R(s)}{p_s^*} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2} p_s t} \cdot \sin p_s^* t \quad (32)$$

где

$$p_s^* = p_s (1 - v_s^2 p_s^2)^{1/2} \quad (33)$$

При решении системы следует воспользоваться ИПФ для линейной системы (30)-(32). Решения нелинейной системы можно записать в виде нелинейных интегральных уравнений второго рода [3] в виде суммы интегралов типа свертки (7). Перемещения линейной системы от действия внешних нагрузок $q_z(t)$, $M_y(t)$, $q_x(t)$:

$$s_{z,\text{лин.}}(t) = \int_0^t q_z(\tau) k_{uz}(t - \tau) d\tau; \quad (34)$$

$$\vartheta_{y,\text{лин.}}(t) = \int_0^t q_\vartheta(\tau) k_{u\vartheta}(t - \tau) d\tau; \quad (35)$$

$$s_{x,\text{лин.}}(t) = \int_0^t q_x(\tau) k_{ux}(t - \tau) d\tau; \quad (36)$$

Нелинейные составляющие решения (перемещения от фиктивных нагрузок) определяются из интегральных уравнений зависящих от принятого типа нелинейности (2), (5):

$$\begin{aligned} s_{z,\text{нелин.}}(t) &= \int_0^t [\Phi_1(\tau) + \Phi_2(\tau)] k_{uz}(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^t \lambda \cdot (-K_{z2}(s_z \pm s_{z0}) - K_{zx2}(\vartheta_y \pm \vartheta_{y0})) \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_1(p_s) \cdot R(s)}{p_s^*} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2} p_s(t-\tau)} \cdot \sin p_s^*(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{y,\text{нелин.}}(t) &= \int_0^t [\Phi_3(\tau) + \Phi_4(\tau) - \Phi_5(\tau)] k_{u\vartheta}(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^t \lambda \cdot (-K_{xz2}(s_z \pm s_{z0}) - K_{\vartheta 2}(\vartheta_y \pm \vartheta_{y0}) + K_{xz2}(s_x \pm s_{x0})) \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_2(p_s) \cdot R(s)}{p_s^*} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2} p_s(t-\tau)} \cdot \sin p_s^*(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} s_{x,\text{нелин.}}(t) &= \int_0^t [-\Phi_6(\tau) + \Phi_7(\tau)] k_{ux}(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{B} \int_0^t \lambda \cdot (K_{xz2}(\vartheta_y \pm \vartheta_{y0}) - K_{x2}(s_x \pm s_{x0})) \sum_{s=1}^{n=3} \frac{L_3(p_s) \cdot R(s)}{p_s^*} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2} p_s(t-\tau)} \cdot \sin p_s^*(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (39)$$

где λ – прерывистая функция, равная 0 при $|s_z| \leq |s_{z0}|$ и 1 при $|s_z| > |s_{z0}|$. Знак «+» в (37), (38), (39) при $s_z(t) \leq 0$ и «-» при $s_z(t) > 0$.

Для простоты вычисления интегралов ИПФ разделяют на части, зависящие исключительно от t или τ . Алгоритм вычисления таких интегралов показан, например, в [1], [6].

Результаты

Для иллюстрации применения представленного алгоритма рассмотрим задачу расчета колебаний виброизолированного массивного оборудования (вентилятора), как системы с тремя степенями свободы на

произвольные динамические воздействия. Характеристика нелинейной виброизоляции представлена на рис. 1, коэффициенты жесткости системы и итоговые перемещения (углы поворота) при различных жесткостных характеристиках виброизоляции и различных значениях зазора представлены в таблице 1.

Характеристика системы:

- масса оборудования — 2400 кг;
- частота возмущающей силы $\omega = 157$ рад/с ($f = 25$ Гц);
- амплитудные значения внешней силы $Q_1 = Q_3 = 10$ кН;
- эксцентриситет $l_1 = 0,1$ м;
- момент инерции системы относительно оси oy $I_y = 0,5 \cdot 10^3$ кг · м²;
- квадрат радиуса инерции $p_y^2 = I_y/m_0 = 0,208$ м²;
- величина зазора s_{z0} .

Таблица 1 - Амплитуды перемещений в системах при различных вариантах виброизоляции
DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.65.1.3>

Вариант виброизоляции	Постоянный параметр (п.п.)	Измененный параметр	Максимальные перемещения, углы поворота (мм, рад)		
			При пуске	При эксплуатации	При остановке
Традиционная система (линейная)	$K_z = 26 \cdot 10^2$ кН/м $K_x = 18 \cdot 10^2$ кН/м $K_y = 9 \cdot 10^2$ кН/м $K_{\varphi} = 5 \cdot 10^2$ кНм $K_{xz} = 11 \cdot 10^2$ кН	–	$s_z(t) = 1,25$ мм $s_x(t) = 0,53$ мм $\vartheta_y(t) = 0,0042$ рад	$s_z(t) = 0,18$ мм $s_x(t) = 0,19$ мм $\vartheta_y(t) = 0,0010$ рад	$s_z(t) = 1,00$ мм $s_x(t) = 0,41$ мм $\vartheta_y(t) = 0,0035$ рад
Система с включающимися связями (нелинейная)	$K_z = 26 \cdot 10^2$ кН/м $K_x = 18 \cdot 10^2$ кН/м $K_y = 9 \cdot 10^2$ кН/м $K_{\varphi} = 5 \cdot 10^2$ кНм $K_{xz} = 11 \cdot 10^2$ кН	$s_{z0} = 0,5$ мм 50% от п.п. $K_{z2} = 13 \cdot 10^2$ кН/м $K_{x2} = 9 \cdot 10^2$ кН/м $K_{y2} = 4,5 \cdot 10^2$ кН/м $K_{\varphi 2} = 2,5 \cdot 10^2$ кНм $K_{xz2} = 5,5 \cdot 10^2$ кН	$s_z(t) = 0,75$ мм $s_x(t) = 0,69$ мм $\vartheta_y(t) = 0,0033$ рад	$s_z(t) = 0,19$ мм $s_x(t) = 0,24$ мм $\vartheta_y(t) = 0,0012$ рад	$s_z(t) = 0,99$ мм $s_x(t) = 0,41$ мм $\vartheta_y(t) = 0,0035$ рад
	$K_z = 26 \cdot 10^2$ кН/м $K_x = 18 \cdot 10^2$ кН/м $K_y = 9 \cdot 10^2$ кН/м $K_{\varphi} = 5 \cdot 10^2$ кНм $K_{xz} = 11 \cdot 10^2$ кН	$s_{z0} = 0,3$ мм 50% от п.п. $K_{z2} = 13 \cdot 10^2$ кН/м $K_{x2} = 9 \cdot 10^2$ кН/м $K_{y2} = 4,5 \cdot 10^2$ кН/м $K_{\varphi 2} = 2,5 \cdot 10^2$ кНм $K_{xz2} = 5,5 \cdot 10^2$ кН	$s_z(t) = 0,99$ мм $s_x(t) = 0,64$ мм $\vartheta_y(t) = 0,0034$ рад	$s_z(t) = 0,19$ мм $s_x(t) = 0,21$ мм $\vartheta_y(t) = 0,0010$ рад	$s_z(t) = 0,99$ мм $s_x(t) = 0,41$ мм $\vartheta_y(t) = 0,0035$ рад

Максимальные перемещения и угол поворота в традиционной схеме виброизоляции наблюдаются при пуске и равны 1,25 мм, 0,53 мм и 0,0042 рад соответственно в вертикальном, горизонтальном направлениях и при повороте вокруг оси (см. рис. 3). Использование системы виброизоляции с включающимися связями для оборудования с вращающимися частями эффективно для гашения вертикальных колебаний (до 40%) и угла поворота (до 20%) при пуске, при этом наблюдается увеличение горизонтальных колебаний (до 30%) при пуске, влияние на колебания в эксплуатационном режиме и при остановке не значительно.

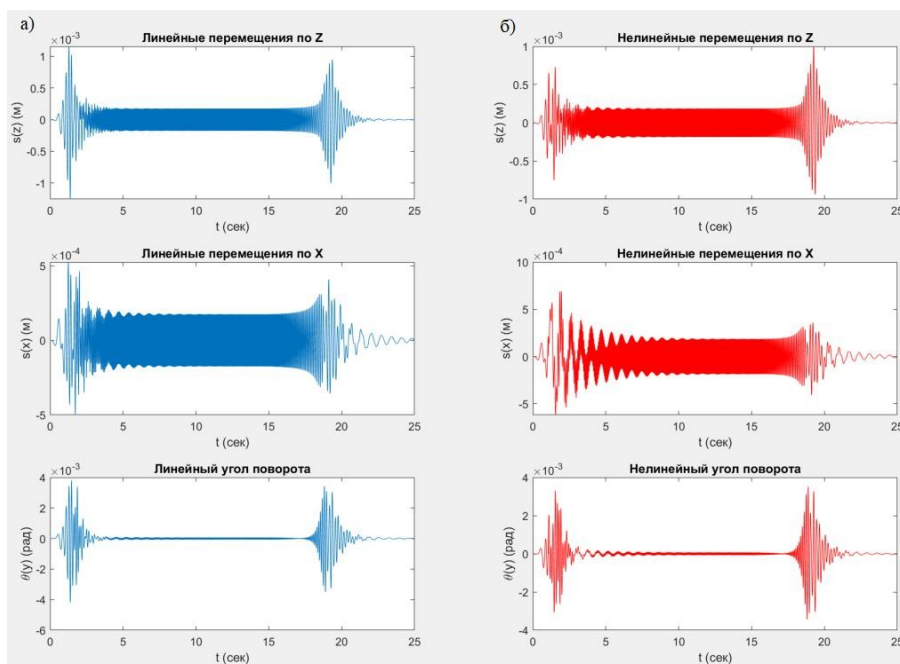


Рисунок 3 - Перемещения виброизолированного оборудования
DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.65.1.4>

Примечание: а – в традиционной (линейной) системе; б – в системе (нелинейной) с включающимися связями с величиной зазора $s_{z0} = 0,5$ мм

Также отмечается особенность влияния величины зазора на эффективность виброизоляции: для принятой расчетной схемы и жесткостных характеристиках виброизоляции уменьшение величины зазора до 0,3 мм приводит к снижению эффективности гашения колебаний относительно системы с зазором равным 0,5 мм, однако эффект увеличения горизонтальных колебаний относительно традиционной схемы также снижается (см. табл. 1). Таким образом, по мере последовательного уменьшения зазора наблюдается снижение выраженности эффектов, обусловленных применением нелинейной виброизоляции. Визуально это отражается в том, что графики зависимости перемещений от времени нелинейных системы приобретают характер, аналогичный графикам в линейной системе (см. рис. 4).

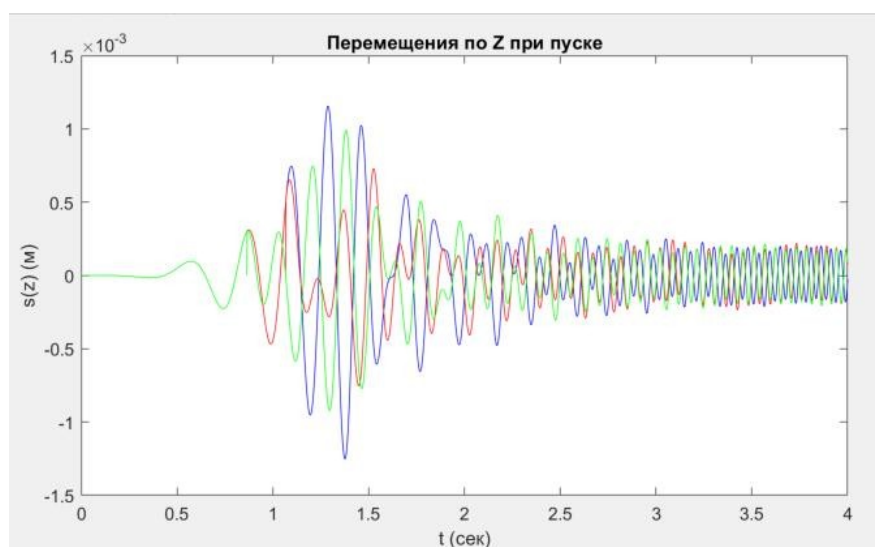


Рисунок 4 - Вертикальные перемещения виброизолированного оборудования при пуске
DOI: <https://doi.org/10.60797/mca.2025.65.1.5>

Примечание: синяя кривая – линейная система без зазора; зеленая кривая – нелинейная система с зазором 0,3 мм; красная кривая – нелинейная система с зазором 0,5 мм

Полученные результаты свидетельствуют об эффективности применения нелинейной виброизоляции относительно линейной для достижения снижения колебаний в переходных режимах, в частности, для оборудования, наибольшие колебания которого возникают при пуске, а горизонтальные колебания которого малы или не нормируются.

Таким образом аналитические и численно-аналитические методы позволяют лучше понимать сущность физических процессов, например, переход через резонанс, влияние величины зазора на эффективность гашения колебаний. Также алгоритм может быть использован для расчетных обоснований проектных решений, поверочных расчетов виброизолированных установок с вращающимися частями (насосы, центрифуги, вентиляторы, турбомашины и т.д.), сравнения различных типов виброизоляции и устройства наиболее эффективной для требуемых целей.

Перспективным направлением дальнейших исследований является проведение более всестороннего и детализированного анализа различных расчетных схем, включающих разнообразные типы оборудования, нагрузки, а также различные параметры жесткости виброизоляции для подбора их оптимальных характеристик. В частности, особое внимание стоит уделить анализу виброизолированных систем с нелинейными характеристиками жесткости, изменяющимися согласно законам, таким как экспоненциальный, степенной и т.д., а также с включением в систему виброизоляции элементов с повышенным уровнем диссипативных сил — демпферов вязкого и сухого трения [7].

Заключение

1. Приведенные в статье методы и алгоритмы расчета позволяют рассматривать системы линейной и нелинейной виброизоляции в переходных режимах, а также существенно сократить этапы расчета по сравнению с методом «нормальных форм», а решения записать непосредственно относительно обобщенных, а не главных координат.

2. ИПФ представленные в виде разложения по формам собственных колебаний позволяют достаточно просто построить решения для линейных и нелинейных систем виброизоляции оборудования, в том числе со многими степенями свободы, по сути, сводящиеся к вычислению интегралов типа свёртки — от основной и «фиктивной» нагрузок.

3. При формировании расчетных программ следует учитывать особенность — учет жесткостей нелинейной виброизоляции по вертикальному, горизонтальному направлениям и при повороте вокруг оси осуществляется одновременно при достижении вертикальными колебаниями $|s_z|$ значений равными или больше s_{z0} .

4. При оптимальном проектировании системы виброизоляции с включающимися дополнительными связями, а именно, при рациональном подборе жесткостей виброизоляторов и величины зазора, можно существенно снизить уровень колебаний системы при пуске, тем самым снизив износ оборудования и влияние на окружающую застройку, людей.

5. Применение нелинейной виброизоляции приводит к снижению уровней колебаний самого оборудования, а также к снижению реакций, передаваемых на опорные конструкции (плиты перекрытий, балки и т.д.), тем самым позволяя удовлетворить требованиям СН 2.2.4/2.1.8.566-96 «Производственная вибрация, вибрация в помещениях жилых и общественных зданий» по ограничению колебаний опорных конструкций, а также при установке оборудования на фундаменты удовлетворить требованиям СП 26.13330.2012 «Фундаменты машин с динамическими нагрузками», в котором для различных типов машин установлены наибольшие допустимые амплитуды колебаний фундаментов.

Конфликт интересов

Не указан.

Рецензия

Все статьи проходят рецензирование. Но рецензент или автор статьи предпочли не публиковать рецензию к этой статье в открытом доступе. Рецензия может быть предоставлена компетентным органам по запросу.

Conflict of Interest

None declared.

Review

All articles are peer-reviewed. But the reviewer or the author of the article chose not to publish a review of this article in the public domain. The review can be provided to the competent authorities upon request.

Список литературы / References

1. Чернов Ю.Т. Вибрации строительных конструкций. Аналитические методы расчета. Основы проектирования и нормирования вибраций строительных конструкций, подвергающихся эксплуатационным динамическим воздействиям / Ю.Т. Чернов. — 2-е изд. — Москва : Издательство АСВ, 2011. — 384 с.
2. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления / В.В. Солодовников. — Москва : Физматгиз, 1960. — 470 с.
3. Чернов Ю.Т. Интегральные уравнения второго рода в задачах расчета нелинейных систем с конечным числом степеней свободы при произвольных динамических воздействиях и характере физических зависимостей / Ю.Т. Чернов // Вестник НИЦ «Строительство». — 2023. — Т. 38, № 3. — С. 155–167.
4. Руководство по проектированию виброизоляции машин и оборудования / ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. — Москва : Стройиздат, 1973. — 160 с.
5. Осипова М.В. Колебания виброизолированных систем и систем с динамическими гасителями колебаний в переходных режимах : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 / М.В. Осипова. — Москва, 2014. — 121 с.

6. Клаф Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. — Москва : Стройиздат, 1979. — 320 с.
7. Зебилина М. Расчет и оценка эффективности систем виброизоляции с линейными и нелинейными характеристиками : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 / М. Зебилина. — Москва, 2018. — 117 с.
8. СП 26.13330.2012. Фундаменты машин с динамическими нагрузками. Актуализированная редакция СНиП 2.02.05-87. — Москва : ФАУ «ФЦС», 2012. — 70 с.
9. Чернов Ю.Т. О некоторых методах и алгоритмах расчета систем с выключающимися связями / Ю.Т. Чернов, И.А. Петров // Строительная механика и расчет сооружений. — 2013. — № 2. — С. 61–66.
10. Осипова М.В. Расчет виброизолированных систем на динамические нагрузки с использованием передаточных функций // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. — 2013. — № 4. — С. 18–20.
11. Петров И.А. О двух методах расчета нелинейных систем с одной степенью свободы / И.А. Петров, М.В. Осипова // Интернет-вестник ВолгГАСУ. — 2012. — № 3(23). — С. 1–10.
12. Рекомендации по виброзащите несущих конструкций производственных зданий / ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. — Москва : Стройиздат, 1988. — 217 с.

Список литературы на английском языке / References in English

1. Chernov Yu.T. Vibratsii stroitel'nykh konstruksii. Analiticheskie metody rascheta. Osnovy proektirovaniya i normirovaniya vibratsii stroitel'nykh konstruksii, podvergayushchikhsya ekspluatatsionnym dinamicheskim vozdeistviyam [Vibrations of building structures. Analytical calculation methods. Fundamentals of design and standardization of vibrations of building structures subjected to operational dynamic impacts] / Yu.T. Chernov. — 2nd ed. — Moscow : Publishing House ASV, 2011. — 384 p. [in Russian]
2. Solodovnikov V.V. Statisticheskaya dinamika lineinykh sistem avtomaticheskogo upravleniya [Statistical dynamics of linear automatic control systems] / V.V. Solodovnikov. — Moscow : Fizmatgiz, 1960. — 470 p. [in Russian]
3. Chernov Yu.T. Integral'nye uravneniya vtorogo roda v zadachakh rascheta nelineinykh sistem s konechnym chislom stepeni svobody pri proizvol'nykh dinamicheskikh vozdeistviyakh i kharaktere fizicheskikh zavisimostei [Second-kind integral equations in problems of calculating nonlinear systems with a finite number of degrees of freedom under arbitrary dynamic impacts and nature of physical dependencies] / Yu.T. Chernov // Vestnik NITs «Stroitel'stvo» [Bulletin of the Research Center "Construction"]. — 2023. — Vol. 38, № 3. — P. 155–167. [in Russian]
4. Rukovodstvo po proektirovaniyu vibroizolyatsii mashin i oborudovaniya [Guidelines for the design of vibration isolation of machines and equipment] / TsNIISK im. V.A. Kucherenko. — Moscow : Stroyizdat, 1973. — 160 p. [in Russian]
5. Osipova M.V. Kolebaniya vibroizolirovannykh sistem i sistem s dinamicheskimi gasitelyami kolebaniy v perekhodnykh rezhimakh [Vibrations of vibration-isolated systems and systems with dynamic vibration absorbers in transient regimes] : PhD dissertation in Technical Sciences : 05.23.17 / M.V. Osipova. — Moscow, 2014. — 121 p. [in Russian]
6. Klaf R. Dinamika sooruzhenii [Dynamics of Structures] / R. Klaf, J. Penzien. — Moscow : Stroyizdat, 1979. — 320 p. [in Russian]
7. Zebilila M. Raschet i otsenka effektivnosti sistem vibroizolyatsii s lineinymi i nelineinymi kharakteristikami [Calculation and evaluation of the effectiveness of vibration isolation systems with linear and nonlinear characteristics] : PhD dissertation in Technical Sciences : 05.23.17 / M. Zebilila. — Moscow, 2018. — 117 p. [in Russian]
8. SP 26.13330.2012. Fundamenty mashin s dinamicheskimi nagruzkami. Aktualizirovannaya redaktsiya SNiP 2.02.05-87 [Foundations for machines with dynamic loads. Updated edition of SNiP 2.02.05-87]. — Moscow : FAU «FTS», 2012. — 70 p. [in Russian]
9. Chernov Yu.T. O nekotorykh metodakh i algoritмах rascheta sistem s vyklyuchayushchimisya svyazyami [On some methods and algorithms for calculating systems with disconnecting links] / Yu.T. Chernov, I.A. Petrov // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii [Structural Mechanics and Analysis of Structures]. — 2013. — № 2. — P. 61–66. [in Russian]
10. Osipova M.V. Raschet vibroizolirovannykh sistem na dinamicheskie nagruzki s ispol'zovaniem peredatochnykh funktsii [Calculation of vibration-isolated systems for dynamic loads using transfer functions] // Seismostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii [Earthquake Engineering. Safety of Structures]. — 2013. — № 4. — P. 18–20. [in Russian]
11. Petrov I.A. O dvukh metodakh rascheta nelineinykh sistem s odnoi stepen'yu svobody [On two methods for calculating nonlinear systems with one degree of freedom] / I.A. Petrov, M.V. Osipova // Internet-vestnik VolgGASU [Internet Bulletin of VolgGASU]. — 2012. — № 3(23). — P. 1–10. [in Russian]
12. Rekomendatsii po vibrozashchite nesushchikh konstruksii proizvodstvennykh zdaniy [Recommendations for vibration protection of load-bearing structures of industrial buildings] / TsNIISK named after V.A. Kucherenko. — Moscow : Stroyizdat, 1988. — 217 p. [in Russian]